2

DE ARTE SVP-
putandi libri qua-
tuor, Cutheberti
Tonſtalli.



PARISIIS.
EX OFFICINA ROBERTI STEPHANI.
M.D.XXXVIII.

CVTHBERTVS TONSTALLVS THO-
MAE MORO S. P. D.

IAM ANTE ALIQVOT ANNOS, MI MORE, cum mihi cum argentarijs negotium interueniſſet, nec ſatis inter nos de ratione conueniret: vt fraudem mihi magnopere ſuſpectam vitarem, coactus ſum rationes non admodum expeditas paulo propius inſpicere, atque artem ſupputandi quondam adoleſcenti mihi deguſtatam iterum repetere. qua ratione cum me à callidorum hominum moleſtia explicuiſſem, cœpi mecum cogitare, futurum mihi in reliqua vita non modicum operæprecium, ſi numerandi artem ſic in promptu tenerem, vt à quantunuis verſuto falli attentus non poſſem. Itaque vt penitius rem cognoſcerem, omnes omnium ſcriptos de ea re libellos, eruditos, ineptos, Latinos, barbaros, quorum callerem linguas (nam nulla pené natio eſt quæ non eam artē vulgi lingua ſcriptam habeat) perlegi. & ne ſæpius toti libelli, quorum magna pars interdum non placebat, non ſine faſtidio relegēdi eſſent: ſiquid in his alicubi, quod gratum eſſet, occurreret, obiter annotaui. Quo factum eſt, vt ex multis multorum ſcriptis multa etiam ipſe colligerem: quæ dum repoſita apud me aliquandiu aſſeruaſſem, ſubibat animum, conducibile fore ſi ſermone Latino, paulo magis perſpicua reddere ea poſſem. Idque dum tentarem, & res parū procederet, fatigatione deuictus libellos ſæpe abieci, deſperans quod deſtinaram, à me præſtari poſſe, tum quòd res ipſa per ſe obſcura eſſet, tum quòd multa ſæpe occurrerent, quæ nec Latinū ſermonem nedum eloquentiam admittere videbātur. Contrà incepto deſiſtere poſt auſpicatum opus oneri ſuccumbētem pudebat. Itaque ſubinde tentabam, ſiquid virium adderet repetitus labor. Interdum cū ipſis certare difficultatibus iuuabat. & quæ moleſtiam non modicam afferebant, contrà quàm fieri ſolet, obſtinatum ad laborem augebant animum. Nonnunquam cogitabam, poſtquam id quod maxime optabam, conſequi non poſſem, vt cūcta cum gratia quadam niterent: non inutile futurum, ſi quæ barbarie quadā inculta ſqualebant, minus horrida redderem. Sic tandem certus propoſiti deuoraui tædium, ac per multas difficultates eluctatus, è compluribus excerpta hæc qualiacunque notaui, quæ apud me iam diu de induſtria preſſi, cogitās ad vrſi exemplum fœtus ipſos informes aliquando per ocium lambendo figurare.

Nunc ad pontificatum Londinenſem vacantem homo omnium maxime eo honore indignus, benignitate tamen regis cum de omnibus bonis, tum de me ſuprà quàm dici poteſt meriti, deſignatus, & quod ſupereſt vitæ, ſacris addictur⁹ literis, prophana omnia ſcripta longe releganda putaui. atque in primis illos apud me reconditos de numerandi arte cõmentarios Vulcani quàm Mineruæ ſcrinijs digniores abijciendos cenſui. Neque enim vel dignos eſſe qui in doctorum venirent manus, vel vllam in poſterũ vitæ meæ partem ſacris ſuffurari literis, vt limam eis inducerẽ, fas eſſe exiſtimaui. Rurſus in mentẽ venit, aliquid in his non inutile Arithmeticæ operam daturis poſſe deprehendi: nec ſatis conſultum fore, ſi quæ mihi tot noctium lucubrationibus cõſtiterunt, flammis abſumenda committerem. Nec tamen vt regi longe ſupra regum fortunam erudito, déque me ſupra omnes mortales merito, rude atque impolitum opus dedicarem, animum inducere potui: ne publica tantiſper negocia remorarer: dum ille ineptijs his legendis daret operã: néve gratiã quam referẽdi ſpes nequaquam datur, ingrato officio corrupiſſe viderer. Itaque circunſpiciẽti mihi, cuinam potiſſimũ ex amicorum cohorte collectanea hæc dicarem, tu pro noſtra conſuetudine atque animi tui candore viſus es ex omnibus maxime idoneus, qui, ſiquid in hoc opere placeret, gratum habere: ſiquid eſſet ieiunius, boni conſulere: ſiquid vſquam offenderet, ignoſcere paratus eſſes. Cui enim aptiora hæc quàm tibi eſſe poſſunt, qui totus in ſupputationibus excutiendis occupatus in regni ærario poſt præfectum primas tenes: quíque liberis tuis, quos liberalibus inſtitui diſciplinis curas, legenda ea relegare poteſ? illis enim vel maxime profuerint, ſi modo eſſent lectu digna, cum nulla re iuuenum magis vegetetur ingenium quàm numerorum arte diſcenda. Vale.

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM DE ARTE SVPPVTANDI PRAEFATIO.

ARTEM SVPPVTANDI STVDIOSIS EDIturus in primis illud præfandum operæpretium eſſe putaui, Pythagoram & veteres philoſophos pleroſque omnes vim quandam diuinam numeris tribuiſſe: id quod non abs re feciſſe exiſtimantur. Nam cum Mathematicæ diſciplinæ quatuor exiſtant: Arithmetica, quæ numerandi artem atque vniuerſam numerorum vim explicat, Muſica, quæ ſonorum concentus atque harmoniam diſcernit, Geometria, quæ terræ & aliarum rerum metiri magnitudinem inſtituit, Aſtrologia, quæ cæli atque aſtrorum motus certa naturæ lege inuariabiles docet: harum ad notitiam peruenire cupienti, primum Arithmeticam, quæ cæteris aditum pandit, deguſtare neceſſe eſt, ſine qua nunquam ad illas penetrare licebit. Hæc nanque ab illis nihil ſumit mutuum, ſuiſque contenta dotibus nihil alienum requirit: illæ contrà, ab hac præſidia ſæpe petunt. Itaque cum dei natura ſit eſſentia ſubſtantiáque ſimplex, quæ omnia intra ſe complexa nihil extra ſe quærit, ab omni concretione corporea terrenáque ſemota: illam etiam diſciplinam, quæ de incorporeis tractans nihil aliunde petit, par eſt arbitrari diuinam. Hac veteres ipſi totam philoſophandi rationem putauerunt eſſe concluſam. Nec tamen propterea quòd hæc omnium prima tentanda eſt, intellectu quoque facillima deprehēdetur, cum in illis multa effingi poſſint, quæ nos per ſenſus corporis veluti per manus in cognitionem ducant. quippe in Muſica, ſonorum in muſicis inſtrumentis concentus auribus applaudit, & ſe dat cognoſcendum. In Geometria lineas, circulos, quadratas triquetráſque figuras, & pyramides oculis ſubijcimus. Similiter in Aſtrologia cælum, ſphæras, axes, zodiacos, ſigna duodecim, aſtra etiam ipſa nobis fingimus: atque hæc quidem omnia vel lignea, vel ærea, vel ſi magis libet, depicta. quæ ſanè formæ, cum omnis noſtra cognitio à ſenſu oriatur, plurimum ad earum rerum cognitionem, quarum ſunt ſimulachra, rudes animos iuuabunt. At in Arithmetica ſicubi hærebis, quas, quæſo, numerorum ideas excogitabis, vt tete explices? Numeros nihil corporeum exprimit: nihil oculorum, nihil aurium ſenſus ad numerorum nodos ſoluendos iuuat: nulla numerorum ſimulachra, niſi numeri: tantum acri ingenio, firma memoria, & mente in ſe collecta com-

prehenduntur. Atque ideo moriones, qui ſæpe natura duce modu latos imitantur cantus, & omnigenas rerum formas in conſpectū delatas agnoſcunt, multáque ex ſenſu communi tam apte in ſermone loquuntur, vt prudentes videri poſſint: ſiquid de numeris paulo tortuoſius quæras, continuo deprehenduntur rationis egentes, ſine qua nihil in numeris explicari poteſt. Quocirca cum vita noſtra tota in terrenis verſetur, ad quorum adſequēdam notitiam ſenſus corporis non parum iuuant: cognitionem verò cæleſtium quæ ſola ratione ſectanda ſunt, maxime petamus: cum Mathematicæ diſciplinæ medium inter vtraque gradum teneant: ad cæleſtium cognitionem nulla re melius exercitamur, quàm animum à terrenis tantiſper abſtrahendo, dum matheſibus intenti ſumus: quas nimirum hominibus ipſa rerum natura videtur edidiſſe, vt eſſet quo ſe ad cæleſtium meditationem exercerent. quod quum omnes diſciplinæ Mathematicæ præſtent, tum longe omniū maxime Arithmetica: quæ nullis adiuta corporum imaginibus, mente ſola ſe colligente nititur. Hæc, præterquam quòd in numeris abſcondita quædam, & altioribus philoſophiæ venis abſtruſa rimatur: communem etiam ſupputandi rationem, ſine qua vita tranſigi nullo modo poteſt, mortales docet. Etenim ſiue ſeceſſui quis, ſiue foro ſeſe parat: ſi numerorum rationem non tenet, frequenter erit in vita non ſine damno deriſus. nam qui ſupputantem per dolum defraudabit, maiorem ex decepti inertia, quàm ex parto per fraudem lucro, voluptatem capiet: quem riſum nemo ingenuus ferre æquo animo poſſet. Itaque vel negocio vel ocio ſe dedentibus nihil magis neceſſarium erit quàm numerandi artem tenere promptam. Et vt ea quæ in Arithmetica ſunt altius recondita philoſophi magis callent, ita quod ad ſupputandi rationem attinet, quæ pars eius humillima eſt, à negocioſis longe ſuperantur. tam acres addit ſtimulos ſtudium pecuniæ. Quemadmodum autem cæteris Mathematicis diſciplinis Arithmetica ianuam aperit: ita in huius abdita penetrare ſine computandi ratione perſpecta, facile non datur. Cui rei perdiſcendæ cum aliquando impenſe operā daremus, & varijs ad id præceptoribus, alijs eruditis, alijs negocioſis vteremur: multorúmque libros, qui de ea tentarunt ſcribere, perlegeremus: viſum eſt operæpretium, quæ nos è multis collegimus, ſtudioſis legenda tradere. Id quo magis faceremus: aliorum obſcura ſcripta, aliorum imperfecta, quorundam verò etiam errata nos impulerunt: vt quæ diu multúmque nos torſerunt, vel per nos emen

datiora,vel magis facta perſpicua,ad poſterorum venirent manus. Quid verò præſtiterimus, aliorum ſit iudicium: certe conati ſumus,vt ne quis in poſterum,qui modo Latine ſciat,ad artem ſupputandi diſcendam præceptore egeret. Et quoniam in ſupputationibus ſæpe euenit vt eadem res expediri multiphariam poſſit: noſtri inſtituti non eſt,omnes omnino eorum qui ſcripſerunt,præceptiones enarrare: quod ſanè, præterquam quòd inutile eſſet, faſtidium afferret legentibus, ſed ex multis & varijs modis eos maxime mōſtrare qui viſi ſunt expeditiſſimi,quíque nullis inuoluti ambagibus exitum ſtatim dabunt. Quædam etiam leuicula compendia trademus,hactenus à nemine(quod ſciā)ſcripto prodita. Quāobrem,lectores candidi,lucubratiunculas noſtras vos boni conſulere eo æquius eſt, quòd in re per ſe obſcura plurimum deſudauimus,vt luce paululū inducta, vobis inoffenſa lectio renideret. cui noſtro propoſito, quantuluncunque præſtitimus, gratia à bonis viris habenda eſt. Illud demum præmonendum eſſe duximus: quiſquis hunc librum in manus legendum ſumet, niſi mauult operam perdere,ei à capite eſſe ordiendum. neque enim vbiuis incipienti,tanquam in hiſtoria, ſeſe offeret ſenſus: quandoquidem ita contextum eſt opus,vt ſingula quæ præcedunt, ad ea quæ ſequuntur,inſtar elementorum habeant. Supputandi autem ratio partes has habet præcipuas, Numerationem,Additionem, Subductionē, Multiplicationem,Partitionem,Progreſſionem,Radicum inueſtigationem,de quibus ſingulatim ſuo ordine dicemus.

NITIVM NVMERATIONIS AB VNO PRO-
ficiſcitur : procedere autem ea poteſt etiam in infini-
I tum. Veruntamen numeri primarij, & ſimplicia ha-
bentes nomina, apud omnes gentes ſunt tantum de
cem:videlicet vnum,duo,tria,quatuor,quinque,ſex,
ſeptem,octo,nouem, decem: quibus in ſingulis nationibus primi
nominum impoſitores varie,pro ſuo quiſqu e arbitrio,nomina in-
diderunt. Quicquid vltra decem numeraueris: compoſitum ex ho-
rum in ſe replicatione reperies. nam vnum ad decem addimus, &
numeramus vndecim : duo ad decem , & duodecim producimus:
tria ad decem, & procreamus tredecim : atque ita reliquos nume-
ros primarios cum decem cõponimus,nempe quatuordecim,quin
decim,ſexdecim,ſeptemdecim, decem & octo, decem & nouẽ:do-
nec iterum ad decem ventum fuerit:ibi quia bis dena collegimus,
viginti ea vocamus,quod bis decem ſignificat,quaſi bis ginta,b li-
teræ ſono in u tranſeunte propter vicinam quandã earum in pro-
nunciatione cognationem . nam vt genta centum, ita ginta de-
cem apud veteres in compoſitione ſignificat. Rurſus in numeran-
do progredimur,& ſingulos numeros primarios, cum viginti con
iungimus:quouſque ad terdena veniamus,quæ triginta,hoc eſt ter
decẽ,vocamus:quibus denuo primarios numeros accumulare per-
gimus,donec ad quater dena perueniamus, quæ quadraginta vo-
camus. Atque hac numerandi ratione ſeruata,quinquaginta,ſexa-
ginta,ſeptuaginta,octoginta,nonaginta procreamus:ſemper prio-
ribus denis primarios numeros aggregantes,donec alia collegeri-
mus , quibus ipſis nomina à numeris primarijs ſecundum deno-
rum collectorum numerum denominata tribui manifeſtius eſt,
quàm vt ſit admonendum. Decies dena centum primi nomencla-
tores Latine vocauerunt. Deinde alia dena rurſus procreantes,ip-
ſa centena creſcente numero coaceruarũt:quouſque ad decies cen-
tena venirent:quibus nomen indiderunt Mille. Is ſummus nume
rus apud Latinos eſt , qui vno vocabulo exprimi poteſt . Reliqui
autem omnes in infinitum numeri ex his in ſe replicatis & repe-
titis apud Latinos,atque itidem apud omnes omnium gentiũ lin-
guas,ſua habent collecta nomina. Exempli gratia, decies millena,
centies millena,millies millena,decies millies millena:atque id ge
nus reliqua. præterquã quòd Græca lingua multo cæteris locuple-

tior,nō ſolum decies denis,& decies centenis,ſua vocabula Hecaton,& Chilia dedit,vt cæteræ nationes: ſed etiam decies millenis ſpeciatim indidit nomen,vt Myria dicerentur,& Myriades.

VIDES itaque in magno numerorum corpore id eſſe dena ipſa ex primarijs collecta numeris, quod in corpore noſtro ſunt artus,qui maiora exiſtunt membra. Et quemadmodum in arundinibus internodia paribus diſtincta ſpacijs proceritatem ipſam producunt calamorum: ſic in maioribus numeris alia alijs aggregata dena,velut numerorū internodia, creſcentem magnitudinem cōnectunt. Igitur omnem numerum neceſſe eſt, vel primarium eſſe: vel ex denis coaceruatis collectum:vel partim ex denis, partim ex primarijs compoſitum.

Numeros ſuis literis & notis Latini, ſuis Græci varie ſcribūt:quæ qui latius noſſe velit,apud Latinos Valerium Probum legat,apud Græcos Herodiani de numeris libellum. Noſtri inſtituti eſt eum ſolum numeros ſcribendi morem nunc attingere, qui à Chaldæis primum in finitimos,deinde in omnes penè gentes fluxit: vt ſuis numeri characteribus,non literarū elementis notarentur:qui mos ſignādi numeros,tā apud eruditos & Arithmeticæ peritos,quàm apud omnes omnium gētium mercatores & negotioſos ſic obtinuit,vt non alius magis per orbem terræ nunc ſeruetur.

DECEM itaque ſunt numerorum notæ,quas Arithmetici figuras vocant:ſigna etiam appellare eas licet:quæ omnes omnino in infinitum numeros,varie pro locorū ratione poſitæ,ſignificare poſſunt. Harū nouem ſuos denotant quæque numeros,videlicet prima 1,vnum ſignificat. ſecunda 2,duo. tertia 3,tria. quarta 4,quatuor. quinta 5,quinque.ſexta 6,ſex. ſeptima 7,ſeptē. octaua 8,octo. nona 9,nouem. Decima verò 0 nota ad formam literæ circulari figura eſt,quam alij circulum, vulgus ſiphram vocat:quæ nihil ipſa ſignificat,verum alijs præpoſita numeris, eorū omnium qui ſequuntur,auget in decuplum ſignificationē. Exempli gratia. 0 primæ notæ ſiue figuræ 1, à dextra parte iuncta, eam quæ vnum expreſſerat,decem ſignificare facit,10. atque itidem in reliquis.

ILLVD in primis animaduertendum : cum omnes Latini, & Græci, atque horum æmuli cæteri aliquid ſcripturi à læua recepto more incipiant, atque ita in dextram tendant : quiſquis his notis numeros ſcribere velit,à dextra paginæ parte incipere debet:& numeros cæteris minores à dextra parte ponere, atque ita in læuam tendendo progredi:vt quo maiores accedunt numeri, eo magis in

læuam ſemper eos promoueat. Id quod itidem in numeris obſeruant Latini, Græci, & alij, vt maximum quenque numerum à læua, minimum quenque à dextra collocent. Vnde cõſtare penitius inſpicienti poteſt, numerãdi artem à Chaldæis eſſe profectam: qui dum ſcribunt, à dextra incipiunt, & in læuam progrediũtur. dextram appello paginæ partem, quæ propoſita ante nos charta, dextræ noſtræ propior eſt: læuam, quæ ſiniſtræ.

HAE nouem notæ & figuræ omnes, quibus numeros ſuos denotari diximus, cum non ſemper eaſdem ſedes occupent, varie pro locorum poſitione ſignificant. Nam earũ vnaquæque primo loco, qui ad dextram eſt, tantũ ſuum numerum enunciat. Secundo loco læuam verſus poſita, decies tãtundem. Tertio loco læuam verſus, tantundem centies. Quarto loco læuam verſus, millies tãtundem. Quinto loco læuam verſus, tantundem decies millies. Sexto loco læuam verſus, centies millies tantũdem. Septimo loco læuam verſus, millies tantundem millies. Octauo loco læuam verſus, decies millies tantundem millies. Nono loco læuã verſus, centies millies tantundem millies. Decimo loco læuam verſus, millies ſupra millies tantundẽ millies. Vndecimo loco læuam verſus, decies millies ſupra millies tantũdem millies. Duodecimo loco læuã verſus, centies millies ſupra millies tantundẽ millies. Tertiodecimo loco læuam verſus, millies ſupra millies tantundẽ millies, atque id quidẽ millies. ad quem modũ vlterius etiam in infinitũ progredi licet. Poſtremum autem in numeris locum circulus nunquam obtinet, quando nihil eum ſequitur cuius ſignificationem augeat. Alioqui ſiqua figura à tergo ei erit, omnes numerorum ſedes occupare poteſt. Exemplum ſubdamus, in quo omnes numerorum notas ſuo ordine ponamus, cum aliquarum repetitione vſque ad tertiumdecimum locum, hoc modo,

3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Huius ſeriei numerum & eiuſmodi ſimiles, qui in immẽſum creſcunt, recenſurus, nequa tibi inter numerandum oriatur cõfuſio, quartum locum qui mille repræſentat, puncto ſuprà poſito notabis. Deinde quinto loco & ſexto intermiſſis, iterum ſupra ſeptimum locum punctũ adijcies. Rurſus octauo loco & nono intermiſſis, decimum locum puncto ſuprà adiecto ſignabis. Similiter vndecimo loco & duodecimo prætermiſſis, ſupra tertiumdecimũ locum pũctum appones. Atque ita, ſi maior fuerit numerus, duo-

bus locis à quarto ſemper intermiſſis, tertium quenque puncto ſu prà poſito notabis. Hæc punctorum adiectio non mediocrem numerandi facilitatem pariet. nam punctis ſignata loca, millenaria demonſtrant: ad quæ, velut ad quoſdam gradus, inter numerandum ſiſtere licet. neque enim longa numerorum ſeries vno ſpiritu pronunciari poteſt. Quartus itaque locus exhibet mille. Septimus millena millia, vulgus millionẽ barbare vocat: Latine reddideris, vt nunc fit ſupputatio, vel millena millia, vel millies millena. Priſci, decies centena millia dixerũt: ſicut paululũ infra mõſtrabimus. Decimus locus capit millies millena millia, vulgus milliones millionũ vocat: Latine dixeris, vt nunc mos eſt loquendi, vel millies millena millia, vel millies millena millies. Priſci, decies millies centena millia numerũ illum vocauerunt. Tertiuſdecimus locus exprimit millies millena millia millies, vulgus millionem de millionibus millionũ vocat: Latine, recepto nunc ſupputandi more, enunciabimus, vel millies millena millenorum millia, vel millies millena millia millies. Priſci eum numerum decies millies cẽtena millia millies appellarunt. Numeros inter hos medios ſiue centenarios, ſiue denarios promptum eſt cuiuis enunciare: cum ſtatim ante oculos nobis occurrat inter quæ genera millenariorũ ſunt locati. Quod poſtquã animaduertimus, illud in primis obſeruare debemus, vt numeri illi cẽtenarij & denarij inter puncta adiecta medij, ſecundum nunc receptũ ſupputandi morem, ea ſemper exprimant millenariorum genera quæ proxime à dextra parte punctis ſunt notata, quouſque ad prima millenaria venerimus.

IGITVR numerum hunc immenſum, punctis ſuprà poſitis in locis prædictis notatum, Latine ſic enunciabimus, à poſtremis & maximis incipientes numeris, & in minimis ac primis deſinentes. qui mos eſt apud omnes gentes, verbis numeros eloquendi.

3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Ter millies millena millia millies, ducenties decies millies millena millia, noningenties octogies ſepties millena millia, ſexcenta quinquaginta quatuor millia, trecenta viginti vnum. Aliud exemplum totidem notarum, conuerſo figurarum ordine, ponamus: quo magis, quod dicimus, legentibus innoteſcat.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3

Hunc etiam numerum punctis, vt ſuprà dictum eſt, notatum, La-

tine ſic reddemus. Millies millena millia millies, ducenties tricies quater millies millena millia, quingenties ſexagies ſepties millena millia, octingenta nonaginta millia. centum viginti tria.

EX HIS, quos poſuimus, immēſis numeris per notas ſuas ſcriptis, punctiſque notatis, & Latine redditis, facile erit cuiuis numerum quemlibet minorem tum ſcribere, tum punctis ſignatum, Latine enunciare.

Si verò maior occurret numerus, eadē erit re ipſa facilitas: ſed verba, millies, & millia, toties in ſingulis maioribus numeris repetita, quoties ea addi pro loci augmento neceſſe eſt, auribus faſtidium non leue parient. Et vix vnquam in negocijs humanis maior occurrit numerus, quàm quem ſuprà poſuimus.

IN huiuſmodi autem immenſis numeris, ad ſingula loca punctis ſignata verbis enuncianda, toties vocabula hæc, vel millia, vel millena, vel millies, repetēda ſunt, quoties puncta, ab eo loco vnà etiam cōnumerato, in tota ſerie vſque ad primam notam reperientur: id quod in exemplis iam explicatis licet cernere.

VERVM, ne quis exempla faciliora in libro noſtro deſyderet, eiuſmodi quoque ſubiungemus. Atque ideo notis, vt libet, vſque ad ſeptimum locum poſitis (nam infra nihil eſt opus deſcendere) illud exemplum eſto.

6 8 5 4 9 7 3

Hoc exemplum, punctis prius ſignatum, ſic Latine reddes, Sexies millena millia, octingenta quinquaginta quatuor millia, noningenta ſeptuaginta tria. Aliud exemplum vſque ad decimum locum addo.

7 9 2 4 8 5 3 1 6 0

Numerum hunc, punctis ſuprà poſitis prius diſtinctum, Latine ſic reddemus, Septies millies millena millia, noningenties vicies quater millena millia, octingenta quinquaginta tria millia, centum ſexaginta.

Plura numerorum exempla nihil eſt opus adſcribere, quandoquidem ea quæ poſuimus, facile indicant, quomodo numeri quiuis alij, & ſcribi & Latine enuntiari debeant.

NON ME latet Romanos veteres, priſco more, ſuos nummos Seſtertios computantes, numerum tranſcendentem centum millia (qui numerus ſextam apud Arithmeticos ſedem occupat) La-

tine non enunciaſſe,niſi per aduerbia,decies,vndecies, & quæ ſuprà ſunt,vſque ad centies & millies, atque etiam vltrà in immenſum: per quæ numerum illum centum millium in ſe replicabant: in quo velut in limite quodam numerandi ſiſtebant,iterum incepturi. Interdum etiam vocabula hæc,centena millia,quodam ſermonis compendio omittebant:vt dicerent, Decies ſeſtertiûm pro decies centenis millibus ſeſtertiûm. qui numerus millena millia ſeſtertiorum nummorum exprimit,& ſeptimam apud Arithmeticos ſedem tenet.Centies ſeſtertiûm, pro centies centenis millibus ſeſtertiorum.qui numerus decies millena millia ſeſtertiorũ nummorum indicat, & ſedem apud Arithmeticos occupat octauam. Millies ſeſtertiûm,pro millies centenis millibus ſeſtertiorũ nummorum.qui numerus cẽties millena millia ſeſtertiorum nummorum ſignificat, & locum apud Arithmeticos nonũ poſſidet. & ſic vlterius vſque in immenſum veteres ad eam rationem Latine ſuos nummos computabant. id quod Budæus vir cum primis ætatis noſtræ eruditus, in libro ſuo de Aſſe,mira ſagacitate plenius annotauit.Cæterum Arithmetici vltra cẽtena millia tranſcendẽtes, magis ad millena millia gradum quendam ſiſtendi faciunt:quem tamen ipſum tranſiliunt,& per decies,& centies,auctis locis,rurſus ad millies millena millia denuo figunt gradum: atque vltra etiam ea,procedentes in immenſum, millena millia millenis accumulant,quemadmodum antè diximus.qui mos ſupputãdi per orbem terræ nunc eſt receptus.Itaque inter priſcos & recentiores nihil intereſt aliud,niſi quòd hi millenariorum loca obſeruãtes millena millia millenis aggregant. at priſci, centenorum loca, velut gradus quoſdam facientes, cẽntena millia centenis vſque in immenſum accumulabant,ſemper ea in ſe replicantes. Cæterum locorum augmenta tam cum priſca ſupputatione, quàm cum nunc recepta conſentiunt.Quamobrem nihil video cur priſcam computationem , poſtquã apud omnes nationes eſt antiquata, mordicus tenere debeamus:quando mos nunc receptus maiore ratione nititur.Etenim cum Mille, maximus ſit apud Latinos numerus, qui vnico vocabulo poteſt exprimi:magis progredi cõgruit, donec ad millena millia ventũ erit,quàm ad centena millia,quæ infra ſunt, facere gradum. Verum ſiquem magis iuuat priſco more numerũ aliquem immenſum Latine reddere,breue ad id quoque compendium trademus: vt numerum notis ſcriptum punctis ſupra verticem ſignet,tertio,ſexto, nono,& duodecimo loco, cæteriſq; qui

deinceps,duobus ſemper intermiſſis,ſequentur. illúdque obſeruet? vt à poſtremis incipiens,ſingulas numerorũ notas vſque ad locũ ſextum, ea ſignificatione quã ſedes ſuppeditabũt,per aduerbia exprimat:quæ verò ſextũ locũ præcedũt,reddat per vocabula. Cũ autem ad punctis ſignata loca ventum erit: vocabula hæc, centena millia,ad ſingula puncta pronuntiet. veluti in primo exemplo per nos ſuprà poſito,ſiquis priſco more numeros enuntiare velit,

3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Tricies bis millies centena millia millies, centies nouies millies centena millia,octingenties ſeptuagies ſexies cẽtena millia, quinquaginta quatuor millia,trecenta viginti vnum.

ITIDEM in alijs numeris quantumuis immenſis cuiuis erit facile priſcos imitari,veluti in ſecundo ſuprà poſito, quem priſco more ſic exprimes,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3

Duodecies millies centena millia millies, trecenties quadragies quinquies millies cẽtena millia, ſexcẽties ſeptuagies octies cẽtena millia,nonaginta millia,cẽtũ viginti tria. Ad horũ exemplũ cæteros numeros õnes priſco more Latine reddere nullũ eſt negociũ.

GRAECI autẽ ſupputando quendã ſiſtendi gradũ faciũt ad Myriades,quæ decẽ millia ſignificãt,quintámque occupant ſedẽ: quo maiorem numerũ vno vocabulo nõ exprimunt. deinde myriades tam multas ſibi aggregant,vt ipſarũ etiam myriadum faciant myriadem: quæ ſumma millies centena millia, ſicut loquuntur priſci, vel centies millena millia, ſicut nũc Arithmetici,ſignificat, & nonum locũ tenet. vltra quem numerũ Græci vocabulis carẽtes, rurſus myriades in ſe replicant: donec totidem myriadũ myriades accumulauerint quot propoſiti numeri magnitudo ſuggerit. Hactenus de numeratione dixiſſe ſufficiat.

DE ADDITIONE.

ADDITIO numerorum eſt duorum pluriúmve numerorum in vnam ſummam collectio. Id autem fieri poteſt, ſiue minores quiuis numeri maioribus addantur,ſiue ecõuerſo,ſiue æquales æqualibus. Illud ſummopere obſeruãdum eſt: vt ſiue duo,ſiue plures ſint numerorum ordines, quos in vnam ſummam colligere velimus: ita eos omnino ſcribamus, vt ſub prima nota primi ordinis primæ reliquorũ ordinum figuræ directe,

velut ad perpendiculum locentur:ſub ſecunda ſecundæ,ſub tertia tertiæ,& ſic deinceps:vt in ſingulis ordinibus loci quoque numerorum,velut ſub vna linea perpendiculari ſibi reſpondeant.Nam alioqui ſi numerorũ ordines oblique ſcripti fuerint, & ipſi eorum loci alij alijs permixti ſe mutuo directe non reſpexerint,vt neſciatur quis cui locus reſpõdeat:magna ſequetur in cõputando confuſio. Idque non modo in numerorum additione, verum etiam in deductione,multiplicatione,& partitione eueniet.Quare ne in huiuſmodi labyrinthum incidamus,in vniuerſum præcipiendum eſt in tota numerandi arte, vt accurate ante omnia ponantur directi numerorum ordines,vt primi in ſingulis loci primis,ſecundi ſecundis,tertij tertijs,& ſic deinceps reſpondeant.

AD HAEC in numerorũ additione,deductione,multiplicatione,partitione,per vniuerſas numerorum ſedes, ſiue ſecundas, ſiue tertias,ſiue quartas,ſiue vlteriores,illud perpetuo ſeruare debem⁹, vt tantiſper dum numeros addimus, deducimus, multiplicamus, partimur, omnes omniũ locorũ notas pro primarijs numeris,nõ autem pro denarijs,centenarijs,millenarijs, aut vlterioribus accipiamus. Peracto verò opere,quãdo ſummam vel collectam,vel deductam,vel multiplicatã,vel partitam recẽſemus:ſingulis numerorum ſedibus ſuam vim reſtituimus, vt tum notæ in exprimẽda ſumma eam ſignificationem habeant quam loci ſuppeditabunt.

QVI numeros numeris additurus es : ſi duo tantum ſint ordines, poſtquam alterum numerum ſuprà, alterum infra ſcripſeris, ſub ambobus lineã calamo ducito. Deinde à dextra parte,vbi minimi numeri locati ſunt,incipiens, inferiorem primi loci numerũ ſuperiori eiuſdẽ loci adde,& numerũ ex his duobus cõpoſitũ,ſi vna nota ſcribi poſſit(quod certe erit,ſi minor quàm decẽ fuerit)ſub linea directe ſub primo loco pone.

4
3
7

Sin fuerit numerus denarius,aut eo maior,vt duab⁹ notis ad eius expreſſionẽ ſit opus:primã figurã, etiã ſi circulus ſit, ſub linea directe ſub primo loco ſigna. Et ſecũdæ figuræ numerũ memoriter tenẽs ad ſecũdũ locũ progredere. Vbi ſi circulos tã in ſuperiore,quã inferiore ordine reperis:numerũ memoria retẽtũ ſub linea ſecũdo loco ſubſcribe.

3	0	9
2	0	4
5	1	3

Sin neutra figura circulus fuerit:ante omnia repoſce à memoria numerum depoſitum : ne eius obrepat obliuio ſi reliquos numeros prius addas , quàm illum repetis : eúmque ad inferiorem eius loci notam memoriter adiungens, illam ipſam ſic auctam, ad ſu-

periorem ſecūdi loci figuram adde:& numerum ex eis ſurgentem,ſi vna nota ſcribi poſſit, ſub linea directe ſub ſecundo loco ſcribe.

5	9
3	4
9	3

Si verò altera tātū ſecūdi loci nota circul⁹ fuerit,altera figura ſignificās,numerū ipſū memoria retētū ex memoria promēs adde ſignificāti figuræ:& ex eis ſurgētē numerū ſi vna nota ſcribi poſſit,ſecūdo loco ſubſcribe.

3	8	9
2	0	4
	9	3

Sin ad eū numerū exprimendū, qui ſecūdo loco reperitur, duabus notis opus erit:primā earū,etiā ſi circulus erit, ſub linea directe ſub ſecundo loco pone: & ſecūdæ notæ numerū memoria ſeruans,ad tertiū locū progredere. Vbi itidē per omnia facies vti ſecūdo loco feciſti, & numerum ex additione repertum tertio loco repone.& ſic vlterius vſque ad poſtremum locum perge.

3	8	9
2	6	4
6	5	3

Quò eum ventum erit: numerū ex additione repertum, ſi vna nota ſcribi poteſt,poſtremo loco depone.

7	3	8	9
1	2	6	4
8	6	5	3

Sin duabus figuris ad eum exprimendū opus erit: numerus qui ſupereſt memoria retētus,à ſiniſtra poſtremi numeri,ſub linea ponatur.

	7	3	8	9
	6	2	6	4
1	3	6	5	3

Illa generaliter in omni numerorū addendi loco obſeruare debemus: vt quotieſcūque in ordinibus addendis omnes notæ eiuſdem loci,circuli fuerint,ſi nullus numerus mente ſit retentus, qui lineæ ſubdatur,ſubſcribatur circulus.

2	0	4	0	2
1	0	3	0	1
3	0	7	0	3

Et ſimiliter quotieſcūq; in ordinib⁹ addēdis circulus & nota ſignificās eiuſdē loci fuerint:nullúſque numerus ſupereſt memoria retētus qui ſignificanti notæ addatur:illa ipſa nota ſignificās,ſiue ſuperioris,ſiue inferioris ordinis fuerit,lineæ ſubſcribatur.

4	0	5	2
3	6	0	1
7	6	5	3

Præterea quotieſcūque ſupra lineā ductā plures ſunt ſuperiorū ordinū quàm inferiorū loci,notæ illæ quæ ſuperſunt,eiſdem locis ſub linea ſubſcribi debēt quibus ſupra lineam ſteterunt.

4	3	2	1
		1	0
4	3	3	1

Exemplū duorū ordinum petamus quod ea omnia contineat, quæ ſuprà docuimus.Id autem erit eiuſmodi.

	7	3	0	0	5	8	9	4
	6	0	2	0	3	6	4	3
1	3	3	2	0	9	5	3	7

Quiſquis hos duos numeros in vnū cōpoſiturus eſt, vel mēte cogitet, vel verbis enunciet ea quæ ſequūtur. Primo loco in inferiori ordine reperio tria. addo ea ad quatuor quæ ſūt in ſuperiore ordine. fiunt ſeptē. ea ſub linea ducta ſubſcribo primo loco. Deinde tranſeo ad ſecundū. reperio infrà quatuor, ſuprà nouē: addo, fiunt tredecim. quæ quia duabus notis ſcribi neceſſe eſt: primā figuram quæ tria demonſtrat, ſubſcribo ſecundo loco: alterā verò quæ vnū repræſentat, memoriter tenēs, progredior ad tertium locū. Vbi primum exonerās memoriā, vnū quod mēte teneo, adiūgo ad ſex, qui numerus inferioris ordinis primus occurrit: fiunt ſeptem. ea addo ad octo, quæ ſunt in ſuperiori ordine. ſic prodeunt quindecim. & quoniā ea duabus notis ſcribēda ſunt, primā tertio loco ſubſcribo, quinque. alterā quæ vnū indicat, ſeruans memoria, tranſeo ad quartum locū. Vbi primū promens ex memoria vnū mente retentum, id adiūgo ad tria quę inferiori ordine ſunt ſcripta: fiunt quatuor. quæ addo ad quinque in ſuperiori ordine, & ſubſcribo quarto loco nouē. Pergo ad quintū locū, vbi ſuprà & infrà circuli occurrūt. nihil habeo quod addā: atque ideo ſubſcribo circulū. Sexto loco infrà duo, ſuprà circulus occurrūt. nihil eſt cui addā duo. ſubſcribo duo. Accedo ad ſeptimū locum. ibi infrà circulus, ſuprà tria ſunt: nihil eſt inferius quod adiungā ad tria. ſubſcribo tria. Feſtino ad octauū & poſtremū locū. reperio infrà ſex: adiūgo ad ſeptē quę ſuprà ſunt. exeūt tredecim. is numerus, quia duabus notis ſignandus eſt: primā, nempe tria, octauo loco ſubſcribo: & aliā, quæ vnū ſignificat, à ſiniſtra eiuſdē loci qui poſtremus eſt, pono. atque ita ſub linea facio nonū locū. Numerus itaque ſub linea, quē duos ſupra lineā numeros addētes cōpoſuimus, cōtinet in vniuerſum, Cē ties tricies ter millena millia, ducenta nouē millia, quingēta triginta ſeptē. Quæ de duobus ordinibus cōponendis diximus, pene nobis inſtituēdis ſuffecerint, ſi plures numerorū ordines in vnā ſummā redigere velimus. Verū vt paucis præcipiēdis rē magis aperiamus, Multos ordines in vnū collecturi, numeros primas ſedes occupātes primo colligere ſic debemus, vt ab inferioribus ordinibus incipiētes ad ſuperiores aſcēdamus, & numerū ex additione repertum, ſi primarius erit, primo loco ſub linea ponamus. Sin ex denarijs numeris aliquis fuerit, circulus eo loco ſubſignetur: & nota quæ denariū illū, ſecundū ſuā denominationē repræſentare debet, memoriæ cōmendata, ſecundarū ſediū figuris, ſi infra centū numerus fuerit, annumeretur. Nā alioqui ſi numerus cētenarius, aut eo

maior vſque ad mille ſurget, vt in magnis additionibus nonnunquam euenit: cētena tertium locū, & quæ ſuperſunt dena, ſecundū occupent. Verūtamē vbi numerus vnius ſedis vſque ad centū aut ſupra aſcēdit, & nota quæ illū ſignificatura eſt, memoriter retenta in tertiū ab illa ſede locū trāſferri debet: ne nobis circa ſecūdi loci additionē occupatis, obrepat obliuio numeri retēti, ſtatim eū ſub linea paulum ſub tertio loco alicubi notemus: vt cū ad illū venerimus, admoneamur eum reliquis ſui loci numeris adiūgere. Si verò numerus ex primario & denario cōpoſitus erit: numer⁹ primarius ſub linea ſubſcribat, & denarius memoria retētus ſecundū ſuā denominationē figuris ſecūdi loci cōnumeretur, ſicut de duobus ordinibus eſt ſuprà dictū. Expedito ſecūdo loco ad tertiū trāſeundū eſt: & itidē per omnia faciendū, quēadmodū in ſecūdo. Deinde ad quartū locum ſimiliter pergendū, & deinceps ad reliquos omnes: in quibus obſeruētur quæ de ſecūdo loco diximus. Vbicūque autē eandem ſedē circuli aliqui & notæ ſignificantes occupant: circulis omiſſis, reliquæ figuræ ſimul additæ ſub linea ſuo loco ponantur. Quæ diximus, magis illuſtrabuntur ſequentibus exemplis.

		6	9	0	0	1	3	0	3
		6	9	0	0	0	0	0	0
		6	9	0	0	8	0	0	0
		7	9	0	1	7	1	0	0
		7	9	0	0	0	0	0	3
		7	9	0	0	6	0	0	0
		8	9	0	0	4	0	0	0
		8	9	0	2	6	2	0	0
		8	9	0	0	8	0	0	0
		9	9	0	0	0	0	0	0
		9	9	0	0	2	4	0	0
		9	9	0	1	7	0	0	2
1	0	0	8	0	9	5	0	0	8

EX HIS tot numeris vnū collecturus, ſic cogitabis tacitus, vel ſi mauis, verbis enunciabis. primo loco præter circulos notæ reliquæ octo cōſtituunt. igitur ſub lineā ſcribātur octo. Secūdus locus circulos habet. ſub linea noto circulū. Tertij loci notæ præter circulos exprimunt decē. vno igitur memoriter ſeruato pro denario numero, atque eo adiūcto ad quarti loci figuras, fiūt quinqua-

ginta quinque. horũ quinque ſub linea quarto loco notantur: & quinque mẽte retẽta quinti loci notis,quæ circulis permixtæ ſunt, aggregata faciũt nouẽ.ea lineæ ſubduntur.Sexto loco,quia circuli ſunt,circulus lineæ ſubijcietur. Septimo loco notæ omnes cõpoſitæ producũt centũ & octo.ſubſcribũtur itaque octo,& cẽtenarij numeri nota,in nonũ locum,qui cõnumerato ſeptimo, tertius ab eo eſt,ſub linea reponẽda ſeruatur. Octauo & poſtremo ordinum qui ſupra lineã ſunt,loco ex numeris collectis ſurgũt nonaginta. nouẽ igitur memoriæ mandãtur. circulus octauo loco reponitur. Nono loco ſub linea ex memoria promo nouẽ ab octauo loco delata. ibi reperio vnũ pro centenarij numeri nota ex ſeptimo loco antẽ reconditum:quæ ſimul adiuncta fiunt decẽ.nono igitur loco circulum ſubnoto,& ab eius ſiniſtra vnũ depono:quod decimum locũ facit.Numer⁹ igit̃ ex additione ſub linea collectus erit, Millies millena millia, octies millena millia nonaginta quinq; millia & octo. Aliud exemplũ multorũ ordinũ magis intricatũ ſubijcio.

		9	8	0	9	9	0	0	8
		7	9	0	9	8	0	0	9
		6	7	0	9	8	0	0	8
		9	8	0	9	9	0	0	9
		8	9	0	9	8	0	0	8
		7	7	0	9	8	0	0	9
		9	8	0	9	9	0	0	8
		7	9	0	9	8	0	0	9
		6	7	0	9	8	0	0	8
		9	8	0	9	9	0	0	9
		6	9	0	9	8	0	0	8
		8	7	0	9	8	0	0	9
1	0	0	7	1	8	0	1	0	2

OMNES in hoc exẽplo primi loci notæ ſimul iunctæ centũ & duo cõſtituunt.duo ſub linea primo loco ſcribantur,& cẽtenarius numerus per vnitatis notã ſcribendus tranſferatur in tertiũ locũ. In ſecundo loco,quia nihil habes niſi circulos, ſubnotetur circulus. Tertio loco,quia omnes figuræ circuli ſunt: & nihil eſt quod addas ad vnũ ex primo loco pro cẽtenario numero trãſlatũ, ſubſcribatur vnũ.Quartus locus iunctis ſimul notis centũ continet: quamobrem ſubſcribere oportet circulum:& in tertium ab eo lo-

cum qui quarto etiã connumerato ſextus eſt, ſeruare reponendũ vnũ. Quintus locus centũ & octo cõtinet. ſubnotentur octo. iterum vnũ in tertium locũ, qui ſeptimus eſt à quinto cõnumerato, ſeruetur. Sextus locus, quia notæ omnes ſunt circuli, vnum habet ſubſcriptũ, ex quarto loco pro cẽnario numero ſeruatũ. Septimus locus quia multas habet notas, repeto primo à memoria vnum, ex quinto loco pro cẽtenario numero ſeruatũ. adiungo reliquis eius loci figuris: fiunt nonaginta ſeptẽ. ideò ſub linea ſubſcribo ſeptẽ, ſeruans nouẽ memoriter. Demũ ad octauum & poſtremũ ſupra lineam locũ properans, nouẽ antè recõdita iungo numeris eius loci: ſurgunt centũ. quamobrem circulum vnũ octauo loco, alium à ſiniſtra loco nono ſub linea repono, & centenarij numeri notam in decimũ locum, qui connumerato octauo, ab eo tertius eſt, trãſfero. Cõtinet autẽ hic numerus coaceruatus, Millies millena millia, ſepties millena millia, centũ octoginta millia, centum & duo.

QVI numeros numeris addere prompte velit: ante omnia memoriter ediſcere debet quos numeros procreent ſinguli ſub decẽ numeri primarij, vel ipſi geminati, vel reliquis primarijs adiuncti. quod certe tam ſcitu facile eſt, vt pueri adhuc impuberes id ferme nõ ignorent. Verũ ſiquis adeò ruſtice eſt educatus vt id neſciat: poterit vna hora, modo operam dare velit, id ediſcere. Verbi gratia, Nouem & nouẽ faciunt decẽ & octo. nouem & octo, decẽ & ſeptem. nouem & ſeptem creant ſexdecim. nouẽ & ſex, quindecim. nouem & quinque, quatuordecim. nouẽ & quatuor, tredecim. nouem & tria, duodecim. nouẽ & duo, vndecim. Deinde octo & octo producunt ſexdecim. octo & ſeptẽ, quindecim. octo & ſex, quatuordecim. octo & quinque, tredecim. octo & quatuor, duodecim. octo & tria, vndecim. octo & duo, decem. Rurſus ſeptẽ & ſeptem creant quatuordecim. ſeptem & ſex, tredecim. ſeptem & quinque, duodecim. ſeptẽ & quatuor, vndecim. ſeptem & tria, decem. ſeptẽ & duo, nouem. Deinde ſex & ſex faciunt duodecim. ſex & quinque, vndecim. ſex & quatuor, decem. ſex & tria, nouem. ſex & duo, octo. Præterea quinque & quinque producunt decem. quinque & quatuor, nouem. quinque & tria, octo. quinque & duo, ſeptem. Ad hæc, quatuor & quatuor procreant octo. quatuor & tria, ſeptem. quatuor & duo, ſex. Denique tria & tria cõſtituũt ſex. tria & duo, quinque. duo & duo, quatuor. Nam vnum ad reliquos numeros adiungere, pueri omnes infantiam egreſſi ſciunt. Quæ diximus, figuris notata ſub oculis poſita ſequuntur.

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
9	9 $\frac{9}{18}$	9 $\frac{8}{17}$	9 $\frac{7}{16}$	9 $\frac{6}{15}$	9 $\frac{5}{14}$	9 $\frac{4}{13}$	9 $\frac{3}{12}$	9 $\frac{2}{11}$	9 $\frac{1}{10}$	9
	8	8 $\frac{8}{16}$	8 $\frac{7}{15}$	8 $\frac{6}{14}$	8 $\frac{5}{13}$	8 $\frac{4}{12}$	8 $\frac{3}{11}$	8 $\frac{2}{10}$	8 $\frac{1}{9}$	8
		7	7 $\frac{7}{14}$	7 $\frac{6}{13}$	7 $\frac{5}{12}$	7 $\frac{4}{11}$	7 $\frac{3}{10}$	7 $\frac{2}{9}$	7 $\frac{1}{8}$	7
			6	6 $\frac{6}{12}$	6 $\frac{5}{11}$	6 $\frac{4}{10}$	6 $\frac{3}{9}$	6 $\frac{2}{8}$	6 $\frac{1}{7}$	6
				5	5 $\frac{5}{10}$	5 $\frac{4}{9}$	5 $\frac{3}{8}$	5 $\frac{2}{7}$	5 $\frac{1}{6}$	5
					4	4 $\frac{4}{8}$	4 $\frac{3}{7}$	4 $\frac{2}{6}$	4 $\frac{1}{5}$	4
						3	3 $\frac{3}{6}$	3 $\frac{2}{5}$	3 $\frac{1}{4}$	3
							2	2 $\frac{2}{4}$	2 $\frac{1}{3}$	2
									1 $\frac{1}{2}$	1

SIQVIS apud ſe ſcrutari velit cur hæc ita ſe habent, vt dũ per ſingulos locos notas addimus, eáſque pro primarijs computamus, numerus tamen ſub linea collectus, quando locis ſua ſignificatio redditur, recte in vniuerſum reſpondeat: In promptu ratio eſt. nã quemadmodum in primo numerandi loco, primarias notas, ſi recte copulatæ ſunt, numerus ſub linea collectus continet: ita neceſſe eſt vt per ſingulos locos figuras omnes, ſi recte cõiunctæ ſunt, numerus ſub linea coaceruatus exprimat. Et ſiquis numerus, dum addimus, memoria retentus, à loco vbi repertus eſt, in alium trãſfertur: id fit quia maior eſt quàm vt eo loco quo natus eſt, reponi debuerit: & quando in ſuum locũ recte tranſlatus eſt, velut illius loci fœtus numeratur. Ad hæc cũ per omnes quidẽ locos figurarũ forma eadẽ ſit, ſignificatio verò pro augmento loci longe diuerſa: denominationẽ tamen omnes à primo loco recipiũt, vt quot illic vnitates ſingulæ repræſentãt, totidẽ ſecũdo loco dena, tertio centena, quarto millena, & ſic deinceps, exprimant. Quãdo igitur ſingulis numerorũ ſedibus, numerũ ibi collectum ſub linea ſubijcimus, eadẽ per omnes ſedes ratio eſt quæ de primo loco: vt ſicut ibi omnes numeros numerus ſub linea locatus continet, ita in omnibus locis collectos numeros repræſentet. Et cum omnium locorũ notæ denominationem à primo loco mutuentur, ſignificationem autem diuerſam ſinguli loci ſuppeditent: numerus ſub linea collectus totidem ſecundo loco dena, tertio centena, quarto millena, & ſic deinceps nobis denominabit, quot vnitates locorum illorum notæ, ſi primo loco fuiſſent poſitæ, repræſentarent.

SI SCIRE cupis an recte numeros collegeris, numerorum additionem recte factam eſſe, per deductionem probabis. Itaque ſi poſtquam numerorum additorũ ordinem aliquem à ſumma coaceruata deduces, reliquorum ordinum non deductorum ſumma ex deductione ſurget: tunc in addendo nihil eſt erratũ. Nam cum partes complures ad cuiuſuis rei compoſitionem coeunt, ſiqua earum ſola ſublata erit, cæteras remanere neceſſe eſt. Id manifeſtius fiet, cũ de deductione præcepta dederimus: ad quam nunc properamus.

4	5	3
3	4	2
7	9	5
4	5	3

ET QVONIAM nulla natio eſt quæ varia numiſmatum genera non habeat, alia pluris pretij, alia vilioris: ideo ad tam variorum additionem faciendam, ſingulis & nummorũ & ſummarum generibus ſuæ claſſes in abaco deſignandæ ſunt, vt vnaquæque ſi-

ue ſumma ſiue pecunia, quo maior eſt alijs, magis ſiniſtram occupet: quo vilior, magis dextram. Veluti ſi in vnam ſummā colligendi ſint aurei, valentes ſinguli denarios vicenos quinos: denarij, valentes ſinguli 4 nummos ſeſtertios: ſeſtertij, valentes ſinguli duos aſſes & ſemiſſem: cuiuſmodi ſunt vetera numiſmata Romana: aurei ſiniſtram occupent: denarij in dextram vergentes, medium locum teneant: ſeſtertij verò dextram. Deinde genera hæc tam varia additurus, à prima claſſe dextra ſeſtertiorum incipe: numeróſque omnes colligens, atque obſeruans quot quaternarij reperiuntur: ſiquis numerus excurrit, qui quaternarium non perficit, illum ibi ſubſignato. Ipſos autem quaternarios memoria tenens transfer in proximā denariorum claſſem. continuóque memoriam exonerans, & denarios illic repertos eis adiungens, per omnes ipſius claſſis numeros diſcurre: atque animaduerte quòt viceni quini ſūt obuij. numerū autem excurrentem, qui 25 nō implet, ibi deponito. At viceni quini memoria reconditi, in proximam aureorum claſſem transferantur, cum illis primùm cōputandi: & numerus omnium collectus illic ſubnotetur. Itidem ſi in quauis alia natione aurei, denarij, nummi viliores illius regionis ſupputandi ſunt, eodem modo curandum, vt ſingulis ſua claſſis detur. Viam tantum monſtramus, cætera facile dabit frequens exercitatio.

Exemplum ante oculos ſpectandum hic ſubnotauimus, quod quiuis facile ſine præeunte explicabit.

Aurei	Denarij	Seſtertij
9 0 4	1 5	6
2 4 3	1 6	8
1 7 5	1 9	9
1 3 2 4	5	3

DE SVBDVCTIONE.

SVBDVCTIO numerorum eſt minoris numeri à maiore, vel æqualis ab æquale ſubtractio. Hāc autem eandem, vel deductionem, vel ſubtractionem appellare Latine licet. Vſus eius eſt, à toto ſubducta parte, reliquam totius partem cognoſcere: & vt apertius dicamus, duobus propoſitis numeris, alterum ab altero demere, vt videatur quid ſit reliquum, & quantum alter alterum ſuperet. Verbi gratia. ſume duos numeros, alterum ſeptem, alterum tria. ſi à ſeptem tria deducas, reliqua ſunt quatuor. totidem itaque vnitatibus tria ſuperantur. In ſubductio-

ne neceſſe omnino eſt vt duo ſint numerorũ ordines: alter à quo fieri debet deductio:alter,qui ſummã deducendam contineat. Oportet autẽ ſemper vel minorẽ ſummã à maiore, vel æqualem ab æquale ſubducere. nam maiorem à minore ſubtrahere,cõtra rerũ naturam eſt. Qui de cõputandi ſcripſerunt arte,varia præcepta de ſubducẽdis numeris dederunt:quorũ alij nõnunquã numeri propoſiti notas inter ſubtrahendũ putauerũt eſſe delendas. Alij lõgis ambagibus obſcura quædã docuerũt,vt pene difficilius nõ eſſet numeros diuidere,q̃ deducere. Quæ dum legeremus,& eorũ probaremus nihil,quod vel tortuoſos haberẽt anfractus,vel multis lituris figuras cõfunderent:diu multúmque inueſtigãtes ſiquid apertius inuenire poſſemus,tãdem Iohãnis Garthi philoſophi erudítiſſimi atq; in Arithmetica lõge peritiſſimi auxilio,lõge facillimã & certiſſimã viam in ſubducẽdis numeris inuenimus: qua certe numerus omnis quantũuis magnus,quãtumuis intricatus,manentibus notis vniuerſis,nullo negocio ſubduci poteſt. Et ne multa expectatione lectorẽ torqueamus,ea ſubducendi ratio eſt eiuſmodi.

Poſtquã maior numerus à quo fieri debet deductio,ſupra,& minor numerus qui deducẽdus eſt,infra ita ſcribetur vt loci numerorũ locis reſpõdeant, primi primis,ſecũdi ſecũdis,tertij tertijs,& ſic deinceps:lineáq; ſub ambobus numeris à læua in dextrã perducta erit,ſicut in numerorum additione ſuprà docuimus:tum à dextra parte,vbi minimi numeri locati ſunt incipiẽtes à primo loco,primũ numerũ inferioris ordinis à primo ſuperiore,ſi ille ipſe ſuperior maior fuerit,ſubducam⁹:& quod ex deductione reperietur,ſub linea primo loco ponamus.

7
3
4

Si verò numerus inferior ſuperiore maior erit,vt ab eo deduci nõ poſſit:tunc ſuperiori numero decem memoriter adiungamus, cõputantes ſuperiorem illum minorem numerũ velut ex primario & denario numero cõpoſitum: & ab eo ſic aucto maiorem numerũ inferiorem deducamus. Exempli gratia. ſuperior numerus eſto tria, inferior nouem. nemo deducere nouem à tribus poteſt. ad tria igitur mente adiungamus decem:& nouẽ à tredecim auferamus:tum quatuor ſuperſunt. is eſt numerus quem requirimus,qui ſub linea locetur.

1	3
	9
	4

Quòd ſi ſuperior ordo circulũ habeat,vt inferior numerus,quãtuluſcũque fuerit,ab eo demi nõ poſſit,illum ipſum circulum pro decẽ memoriter numeremus, & ab eo inferiorẽ notã,quæ ſemper denario numero minor erit,auferamus. Exempli gratia. ſit circulus

ſuprà, infrà ſeptem. fieri non poteſt vt ſeptem à nihilo deducamus. circulum igitur pro decem animo cõputemus, & à decem ſubducamus ſeptem: reliqua erunt tria.

o
7
3

Quotieſcunque autẽ denario numero memoriter adiecto, ſuperiorem numerum augebimus, vt inferior qui maior eſt, ab eo demi poſſit: toties per omnes numerorum locos, vnum ad ſequentis loci inferiorẽ numerũ è veſtigio memoriter addemus, illúmque ipſum adiecta vnitate ſic auctum, à ſuperiore eius loci numero, ſi maior ſit, ſubducemus: & quod reliquum erit, eo ipſo loco ſub linea reponemus vnde id ſubtraximus.

4 o
2 7
1 3

Sin minor erit illius loci numerus ſuperior, quàm vt ab eo demi poſſit numerus inferior vnitate illa auctus: rurſus denario numero adiecto augeatur numerus ille ſuperior, vt inferior ab eo abduci poſſit.

2 4 o
1 5 7
8 3

Idque per omnes numerorum locos ſemper eſt obſeruandum.

Sic primo loco expedito, ad ſecundum tranſeundum: vbi per omnia faciendum eſt itidem vt in primo. Sic cum ad tertium, quartum, vlteriorémve locum ventũ erit, eadem perpetuo ſeruãda ſunt.

AT SI quibuſvis numerorũ ſedibus in inferiore demẽdo numero circulus, in ſuperiore autem à quo fit ſubductio, nota ſignificãs reperiatur: ſi nihil à priore loco propter denarium numerum mutuo ſumptum memoria retẽtum erit quod deduci debeat: numerus ille ſuperior integer ſubſcribetur.

4 3 2
3 o 1
1 3 1

Quando verò in vtroque numerorum ordine circulus nobis occurret, ſi nihil ex memoria promi poteſt quod ſubſcribatur, ſubnotetur circulus.

4 o 2
3 o 1
1 o 1

Vbicũque autem in quouis numerorum loco numerus inferior ſuperiori æqualis erit: cum nihil ſit reliquum, ſubſcribatur circulus, præterquam poſtremo loco. ibi enim ſi numerus ſubducendus ei par ſit à quo fit ſubtractio, nihil omnino ſubnotari debet: quia tunc per cætera peracta eſt ſubductio: & circulus in numeris poſtremum locũ occupare nunquam poteſt.

3 4 1   3 4 1
2 4 1   3 2 o
1 o o   2 1

Quòd ſi ſuperior numerorũ ordo numeris aliquot & notis inferiorẽ tranſcendat: poſtquã inferioris ordinis numeros omnes à ſuperiore ſubduximus: quicquid de ſuperiore ordine reliquũ erit, eiſdem locis & notis ſub linea numeris relictis adiungatur quibus ſupra lineam ſuo ordine ſtetit.

6 5 4 7
2 3
6 5 2 4

Nunc exẽpla petamus,quæ viam demõſtratam clarius illuſtrent.

	5	7	2	9	5	4	9	0
4	8	7	6	5	2	9	7	
	8	5	3	0	1	9	3	

QVISQVIS à quinquagies ſepties milenis millibus, ducentis nonaginta quinque millibus,quadringentis nonaginta,ſubducere cupit quadragies octies millena millia,ſeptingenta ſexagintaquinque millia,ducenta nonagintaſeptem : depoſitis notarum ordinibus,lineáque ducta,eiuſmodi quæ ſequuntur,tacitus ſecum conſyderet, à primis auſpicando numerorum ſedibus, Septem à circulo ſubducere non poſſum. computo igitur circulum pro decem: & à decẽ demo ſeptẽ:ſuperſunt tria.ea ſub linea locatur. Tranſeo ad ſecundam ſedem . numerus inferior ſubducendus occurrit, nouem. huic vnum addo,quia ad circulum in primo loco aſſumpſi decem, & pro decem computo. ea à nouem demere non poſſum. mutuor igitur alia decem: & addens ea ſuperioribus nouem , computo decem & nouem, à quibus deduco decem: reliqua ſunt nouem, quæ ſubſcribo. Pergo ad tertium locum:vbi quia in priore ſede ſum decem mutuatus, vnum adiungo ad numerum inferiorem, nempe duo,& fiunt tria.ea ſubduco à quatuor,quæ ſuprà ſunt: reliquum eſt vnum, id ſubſcribo. Progredior ad quartum locum. numerus vterque quinque continet.& quia alter alterum exhaurit:nihil erit reliquum.pono igitur ſub linea circulum.Quinto loco ſex à nouẽ ſubtraho. tria relinquũtur:quæ lineæ ſubijcio. Sexto loco,quia ſeptem à duobus demi non poſſunt:aſſumptis ad ea,decẽ,fiunt duodecim:à quibus aufero ſeptẽ,& quinque ſuperſunt,quæ lineæ ſubdo.Septimo loco,quia 10 in priore ſede ſum mutuatus,inferiorem numerum octo,vno augeo,& nouem computo:ea,quia à ſeptẽ auferre non poſſum,ad ſeptem aſſumptis decem, à ſeptemdecim auferro nouem. reliqua manent octo: ea ſub linea depono. Propero ad poſtremũ locum,quo memoria affert vnum,quia ex ſuperiore ſede ſumpta ſunt decem mutua. eo ad inferiorem numerum quaternarium iuncto, fiunt quinque. quibus à quinque ſuperioribus demptis, nihil ſupereſt reliquũ. nihil igitur omnino ſubſcribitur. tum quia ſubductio iam peracta eſt, tum quia poſtremus locus circulũ nunquam capit. Reliquum igitur ſuperioris numeri,à quo inferiorem ſubduximus,ſub linea reperietur,Octies millena millia,quin-

genta triginta millia, centum nonaginta tria. Iterum aliud exemplum plurium locorum magis impeditum ponamus.

1 0 0 0 0 8 1 0 0 7 1 0 0
4 8 4 0 5 7 4 8 0 0 8 7

5 1 6 0 2 3 5 2 7 0 1 3

Primo loco, quia ſupra ſeptem eſt circulus, aſſumantur decem: à quibus ſeptē deductis, tria ſuperſunt. Secundo loco occurrūt octo, quæ vnitate ex memoria augentur: & fiunt nouem. ſi ea à decē ad circulum aſſumptis ſubtrahantur, remanet vnum. Tertio loco vnū ſupra, infra circulus eſt. vnū ex memoria promitur: quod ſuperius exhaurit. & quia nihil ſupereſt: ſubſcribemus circulum. Quarto loco, quia inferius circulus eſt, ſuperius ſeptē: à quibus nihil eſt quod ſubducamus, ipſa ſeptem ſubſcribuntur. Quinto loco quia octo à circulo demi nequeunt: à decem quæ mutuamur, ea deducimus. duo reſtant. Sexto loco ad quatuor quæ infra ſunt, vnum addimus ex priore ſede memoria ſumminiſtrante: quæ ſimul addita ſubducimus à decem ad circulum ſuperiorem aſſumptis. remanent quinque. Septimo loco, ſeptem vno aucta, quia ab vno demi nequeunt, ab vndecim tolluntur: ſumptis decem, tria ſubnotamus. Octauo loco, quinque quæ ſunt infra, vno ex priore ſede delato augemus: & ſex ab octo ſubtrahimus. duo manent reliqua. Nono loco ſuprà & infrà circulus eſt, igitur ſub linea ponitur circulus. Decimo loco, ſublatis quatuor à decem, quia à circulo nequeūt eximi: ſex ſubſignanda ſunt. Vndecimo loco, octo quæ inferius ſunt, vno in memoria recōdito augemus. & nouem, quia à circulo non poſſumus, à decē deducimus. ſic vnum manet reliquū. Duodecimo loco promimus vnum ex memoria, & addimus ad quatuor. quæ, quia ſuprà circulus eſt, auferimus à decem: & quinque nobis ſuperſunt: ea ſub linea deponimus. & quoniam vnum adhuc ſupereſt mente reconditum, quod vnitatem illam ſuperioris ordinis poſtremā exhaurit, circulus ſubſcribi deberet, niſi poſtremus eſſet locus qui eum non capit. igitur nihil amplius apponitur: quia peractum eſt opus. Reliqui ſumma eſt, Quingēties ſedecies millies millena millia, vicies ter millena millia, quingenta viginti ſeptem millia, & tredecim. Si quis expedite ſine vlla mora numeros velit ſubducere: primū memoriter ediſcat quātum erit reliquū, ſi ſinguli numeri primarij minores à maioribus ſubducantur: id quod pueri plerique omnes tenent: & rurſus quid ſupererit, ſi numeri ſimplices, maiores à mino

ribus cũ denario numero infra viginti copulatis fuerint ſubducti.

Et queadmodum in additione præcepimus,in primis in memoria recondendũ eſſe quos numeros procrearẽt ſinguli numeri primarij ſibi inuicem copulati, ita hic ẽ conuerſo perneceſſariũ putamus vt expedite quis teneat quos relinquant numeros ſinguli numeri primarij,vel inuicẽ à ſe ſubducti, vel à procreatis per ſui additionem numeris extracti. Quod ſiquis ignorat,vnius horæ labor, modo intentus ſit animus,id ſuppeditabit. Verbi gratia,decẽ à decem & nouẽ deductis,ſuperſunt nouẽ. nouem à decẽ & octo demptis,reliqua ſunt nouem. nouem à ſeptẽdecim ſublatis,manent octo. ſi nouem tollas à ſexdecim,remanent ſeptẽ. ſi nouem demas à quindecim,reſtant ſex. ſi nouem auferas à quatuordecim,ſuperſerũt quinque. nouem exemptis à tredecim,quatuor relicta ſunt. ſi verò nouem extrahas à duodecim,tria remanebunt. ab vndecim ſublatis nouẽ,duo ſupereſſe palàm eſt. Deinde octo à ſeptẽdecim tollantur:nouem remanebũt. octo demantur à ſexdecim,octo relinquuntur. octo ſubducãtur à quindecim,ſeptem erunt reliqua. octo auferantur à quatuordecim,ſex adhuc ſuperſunt. ſi octo deducas à tredecim,quinque manent. ſi octo à duodecim extrahas,quatuor exiſtunt reliqua. ſi octo tollas ab vndecim, tria ſunt reliqua. Rurſus ſeptem à ſexdecim tolle,nouem deprehẽdes. ſeptem aufer à quindecim,octo reperies. ſeptem ſubtrahe à quatuordecim,videbis ſupereſſe ſeptẽ. ſeptem deme à tredecim,ſex inuenies. ſeptem à duodecim demptis, quinque ſuperſunt. ſeptem ab vndecim ſublatis, quatuor relicta ſunt. Iam ſex à quindecim dẽpta,nouem relinquũt. ſex à quatuordecim ſubductis, ſuperſunt octo. deme ſex à tredecim, remanebunt ſeptem. tolle ſex à duodecim, reliqua erunt ſex. aufer ſex ab vndecim, quinque tamen ſuperſunt. Age,ſi quinque à quatuordecim ſubduxeris: nouem ſupereſſe inuenies. ſi quinque à tredecim tollas, octo deprehendes. ſi quinque à duodecim demas: reperies ſeptem. ſi quinque ab vndecim ſubducas, reliqua erunt ſex. Iam vero,ſi quatuor à tredecim deducantur:relinquentur nouẽ. ſi quatuor tollantur à duodecim,octo remanebunt. ſi quatuor ab vndecim auferantur,ſeptem erunt reliqua. Rurſus tria demantur à duodecim,nouem nobis occurrunt. ſubducantur tria ab vndecim,octo ſeſe offerunt. Denique duo ſublata ab vndecim,nobis relinquunt nouem.

Hæc,quæ pluribus verbis edocuimus, figuris annotata ſub oculis ſubiecimus.

	19	18	17	16	15	14	13	12	11	
9	19 $\frac{10}{9}$	18 $\frac{9}{9}$	17 $\frac{9}{8}$	16 $\frac{9}{7}$	15 $\frac{9}{6}$	14 $\frac{9}{5}$	12 $\frac{9}{4}$	12 $\frac{9}{3}$	11 $\frac{9}{2}$	9
		8	17 $\frac{8}{9}$	16 $\frac{8}{8}$	15 $\frac{8}{7}$	14 $\frac{8}{6}$	13 $\frac{8}{5}$	12 $\frac{8}{4}$	11 $\frac{8}{3}$	8
			7	16 $\frac{7}{9}$	15 $\frac{7}{8}$	14 $\frac{7}{7}$	13 $\frac{7}{6}$	12 $\frac{7}{5}$	11 $\frac{7}{4}$	7
				6	15 $\frac{6}{9}$	14 $\frac{6}{8}$	13 $\frac{6}{7}$	12 $\frac{6}{6}$	11 $\frac{6}{5}$	6
					5	14 $\frac{5}{9}$	13 $\frac{5}{8}$	12 $\frac{5}{7}$	11 $\frac{5}{6}$	5
						4	13 $\frac{4}{9}$	12 $\frac{4}{8}$	11 $\frac{4}{7}$	4
							3	12 $\frac{3}{9}$	11 $\frac{3}{8}$	3
								2	11 $\frac{2}{9}$	2

MVLTI qui de ſubtractione antehac ſcripſerūt, præcipiūt, quoties numerus maior in aliqua numerorum ſede deducendus eſt, quàm is à quo deduci debeat: ſtatim ab vlteriori loco proximo decem eſſe petenda, delendáque eſſe notam vnde fuerunt petita, & aliam vnitate minorem eius loco reponendam. Quòd ſi circuli ſint medij, iubent omnes eſſe delendos, & eorum loco figuras nouenarias apponēdas. Sin vnitas ſit figura quæ decem commodat, illam in circulum mutādam. Et quia non inutile ad multa erit quæ illi produnt cognoſcere: quanuis priores deleant notas, eorum exempla figuris annotata ſubiecimus.

2	9	10	10
3	0	1	0
1	1	1	1
1	8	9	9

Numerus ſuperior à quo deductio fieri debeat, ſignetur: tria millia & decem. inferior, mille cētum & vndecim. Principio quia vnū à circulo non poſſunt deducere, decem à ſecundo loco ſumūt: & figura vnitatis ibi deleta, circulum reponunt. ab illis decem excepto vno, nouem ſuperſunt. Secūdo loco, quia vnum à circulo ſubducere non licet, & tertius itidem locus circulum habet: ex quarto loco vbi tria notata ſunt, decem petūt: & pro nota ternaria quam delent, binariam ibi reponunt, circulúmque tertij loci medium in figuram nouenariam mutant. Deinde vnum ſecundo loco extrahunt à decem: & ſub linea reponunt nouem. Tertio loco vnum auferunt à nouem. manent octo. Quarto loco vnum à duobus deducunt: & vnum quod eſt reliquum, ſub linea locant. Hæc deducendi via quanquam certa eſt, & memoriam ſeruādis vnitatibus non onerat: numeri tamen maioris à quo fit deductio, notas confundit: vt ſi cui propter errorem in ſubducendo admiſſum repetēdum eſſet opus, numerum primo datum agnoſcere nō poſſet. Alij, quoties numerus ſubducendus maior eo eſt à quo fit ſubtractio, præcipiunt inferioris numeri diſtantiam à denario, ad ſuperiorem à quo fieri debet deductio, addi: & numerum ex additione illa procreatum lineæ ſubdi. Et quandocunque diſtantiam accipiunt, ſemper ſubtrahendæ proximæ figuræ vnitatem mente reconditam addunt: vt illa nota ſic aucta deducatur ab ea, quæ ſupra eam poſita eſt: idque per omnes numerorum locos ſeruant. vt ſi ſeptem à quatuor eſſent demenda: quia ſeptem à decem per tria diſtant, tria ad quatuor addunt: ſeptémque ſic procreata ſubſcribunt: & vnum mēte ſeruatum in proximi loci numerum inferiorem, qui deducendus eſt transferunt.

3	4
9	7
	7

Si verò nota cui addendum eſt vnum memoria retentum, noue-

naria fuerit,quia vno aucta ſit decem,& nihil à decem diſtat:numerum ſupra verticem poſitum, à quo fuiſſet facta deductio, integrũ ſubſcribunt:vt ſi nouem ſecundo loco, quibus vnitas ex primo loco ſeruata addenda eſt,ſubducenda eſſent à tribus in ſuperiore ordine poſitis.quia nouem vno aucta fiunt decem:& nulla eſt diſtãtia quæ capi poſſit:tria,quæ ſupra verticem ſunt, ſub linea reponunt.

3	4
9	7
3	7

Sin figura cui addẽda eſt vnitas, ſit circulus: cũ nihil ſit cui addatur:eam ipſam à ſuperiore figura auferunt,& reliquum ſubnotant.

2	4
0	7
1	7

Si verò ſuprà etiam circulus ſit:nouem,quæ diſtantia eſt à decem,lineæ ſubdunt.

2	0	4
	0	7
	9	7

Vbicunque verò ſuperior nota circulus eſt,inferior figura ſignificans,diſtãtiam inferioris à decem ſubſcribunt.vt ſi duo à circulo deduci debeant, quia duo à decem per octo diſtant,octo ſubſcribuntur.

1	0
	2
	8

Cætera quæ tradunt,cũ his omnino conſentiunt quæ nos ſuprà præcepimus. Hic quoque ſubducẽdi modus quãuis neminẽ fallat, tamẽ dum frequenter aucupamur diſtantiã, dum eam inuẽtam ad ſuperiorẽ numerũ addimus,diu nos moratur,& pene plus de additione q̃ de ſubtractione refert.Quamobrẽ via per nos ſuprà tradita magis erit ſequẽda:quæ cum ſit certiſſima,tum longe cæteris eſt & breuior,& expeditior:nec vllã affert ſubducẽti morã,notas quoque primas relinquit ſemper intactas:vt ſi cui ꝓpter errorẽ in ſubtrahẽdo admiſſum,repetẽdũ eſſet opus, primus numerus ante oculos præſto illi maneat.Quod ſiquis inueſtigare pergat quare quoties decẽ ab aliqua numerorũ ſede mutuamur,toties ad inferiorem ſequẽtis loci numerũ,qui deduci debeat,vnum addamus:cum prima facie cuiuis videri poſſit, vnitatẽ illã ad ſuperiorẽ ſequẽtis loci numerũ à quo ſit ſubtractio,potiꝰ addi debere:ne præcepta dare videamur,quorũ lectori non conſtet ratio,cauſam aperiemus cur ita fieri neceſſe ſit.Nam omnis numerus vltra primũ locum vel numeros denarios cõtinet,vel ex denarijs collectos. vnde cum in aliquo numerorũ loco maior occurrit nota in ordine inferiori,quàm quæ ex minori ſuperioris ordinis deduci poſſit:neceſſe eſt ſuperiorẽ ordinẽ ab vlteriori aliqua numerorũ ſede eum numerũ mutuari qui ſufficere poſſit. is autẽ erit denariꝰ à ꝓxima vlteriori claſſe petitus:

qui iunctus ad minorem illũ primarium ſuperioris ordinis numerum, ad cuius accerſitur auxilium, magnitudinem ſuperabit illius maioris numeri,qui prius à minori non potuit ſubduci. Quocirca cum denarium aliquem numerum ab vlteriori ſede petimus, illius notam ſecũdum præceptionem noſtram ibi relinquentes intactã, ſi nihil ad inferiorem illius loci figuram vnde decem ſumpſimus, adderemus, quod denarij numeri commodati notam adhuc reſtantem exhauriret, decem ibi redundarent, quæ ante memoriter fuiſſent illinc deprompta. Quamobrem,vt illa decem ſumpta mutuo, quorum adhuc figura nihil mutata ibi manet, cum ad illum locũ vẽtum erit,exhauriamus, vnitatem ſemper ad ſequẽtis loci inferiorem numerũ qui ſubducendus eſt, addimus, quæ numerum illum denarium ibi redundantem ſubducat. Idque fit per omnes numerorum ſedes, quoties decem vel ad circulum, vel ad alium primarium aſſumimus.

Siquis experiri vult an recte ſubductio facta ſit:id quod ſummæ reliquum eſt,ad numerum ſubtractum addat. & ſi ex illa numerorum adiunctione maior numerus à quo minorem ſubduximus,iterum ſurget:tum neceſſe eſt ſubtractionem recte peractã eſſe.Quod ſi alium numerum quàm eum à quo prius minorem abſtulimus, additio illa producet: errorem calculi interueniſſe palàm eſt.Nam quemadmodum totum omnibus ſuis partibus ſeiunctis par eſt:ita partes omnes compoſitæ ſuo toto ſunt pares. Cum itaque maior numerus totus à quo ſubductio facta eſt,minorem qui ſubtractus eſt,& reliquum quod ſupereſt,partes ſuas habeat:eiſque par ſit:fieri nõ poteſt quin partes illæ rurſus compoſitæ ſuum totum, id eſt primum numerum à quo minorem abſtulimus, denuo procreent. Et ſi partes illæ ſimul poſitæ alium numerum creant: error manifeſtus eſt. nam omnes partes collectas,à ſuo toto diſſidere rerũ natura nõ patitur. Vſum autem ſubductionis eſſe iam antè diximus, vt indicet quid ſit reliquum, & quantum maior numerus minorẽ ſuperet. Quod quum per præcepta quæ tradidimus inuentum fuerit,ſimul deprehenſum erit quantũ ipſi numeri inter ſe diſtabunt. Nam quantum alter numerus alterum ſuperabit,tantũ inter ſe diſtare cõperientur,vt quot vnitatibus minor à maiori ſuperatus fuerit(quod ſemper ipſum reliquum indicabit) totidem diſtent. Verbi gratia:ſume duos numeros,alterum ſeptem,alterum tria. deme tria à ſeptem,reliqua ſunt quatuor.ſeptem enim tria ſuperant quatuor vnitatibus. diſtant igitur inter ſe totidem. Quòd ſi duos nu-

meros æquales ſumas, & alterum demas ab altero: quia nihil erit reliquum, nihil inter ſe diſtabunt. Itaque ſi perſcrutari velis quantum duo quiuis numeri inter ſe diſtabunt: poſtquam altero ab altero ſubducto, comperiſti reliquum: vna opera differentiam deprehendiſti.

QVOD SI varij generis numeri ſubducẽdi ſunt: deſcriptis in ſuas claſſes, vti in additione diximus, eorum generibus, veluti aureis valentibus ſingulis denarios 25 denarijs valentibus ſingulis ſeſtertios 4, ſeſtertijs valẽtibus ſingulis duos aſſes & ſemiſſem: cuiuſmodi ſunt vetera nummiſmata Romana: numerorũ ſubductio à dextra ſumat initium: ſubtrahantúrque numeri primæ nummorũ claſſis inferiores à ſuperioribus, ſi id fieri poteſt. Cæterũ ſi id fieri nequit, à proxima denariorum claſſe ſumptus mutuo denarius, & in 4 ſeſtertios reſolutus, numerum ſeſtertiorum ſuperioris numeri augeat: vt tum demum inferioris ſubductioni ſufficiat & quoties numerus aliquis mutuo ſumetur, toties ad claſſis ſequentis proximũ numerum ſubducendum vnitas eſt addenda. Similiter ſi denariorũ numerus ſubducendus maior ſit, quàm vt à ſuperiore demi poſſit: aureum mutuum à proxima ſiniſtra claſſe petamus: vt is in denarios 25 reſolutus, numerum denariorum, à quibus fiet ſubductio, augeat. & cum ad illam claſſem ventum erit: ad numerũ proximũ ſubducendum vnitatem adiungamus. Itidem fiat de quibuſcũque varijs nummiſmatum generibus cuiuſuis nationis ſubducendis, Veluti aureis, denarijs, & nummis vilioribus. Exẽplum hic ſubnotauimus, quod ſolus facile ſine præeunte explicabis.

Aurei	Denarij	Seſtertij
1 1 2 3	1 2	2
4 5 6	1 7	3
6 6 6	1 9	3

DE MVLTIPLICATIONE.

MVLTIPLICATIO numerorum eſt vnius in alterũ ductu tertij numeri maioris procreatio: qui toties numerum multiplicatum contineat, quoties numerus multiplicans capit vnitatem. Et vt apertius dicamus, Numerorum multiplicatio eſt maioris numeri procreatio per alicuius numeri ad ſeipſum frequentem accumulationem, crebrámque additionem toties repetitam quoties numerus multiplicans continet vnitatem. Vſus eius

nō modo Aſtrologis pro reductione ſignorū ad gradus, graduum ad minuta,minutorū ad dimidia,& ſic deinceps,verū etiam ad vitam humanam degendam mercatoribus, & omnium hominum conditioni perneceſſarius eſt: Verbi gratia, Si quis centum tritici modios,decem nummis vnumquenque:aut cētum vini dolia,decem aureis ſingula emit:& ſcire cupit quid ei pro vniuerſis ſit ſoluendum. In multiplicatione peragenda tres omnino numeri requiruntur,Primum numerus multiplicandus,quem per aliū multiplicare deſtinamus.Deinde numerus multiplicans,qui toties eū numerum quem multiplicare decreuimus,colligat, quoties in ſeipſo continet vnitatem. Nihil autem refert an minor numerus multiplicet maiorem,an ē conuerſo minorem maior. Nam ex eorum mutuo in ſe ductu idem vtrobique numerus ſemper ſurget. Sicut ter ſeptem,& ſepties tria,eundem numerum creant. Facilior tamen longe multiplicandi modus eſt,cum numerus minor multiplicantis partes occupat,& numerus maior multiplicandi:quàm cum cōtrà ſit. Tertius numerus quem requirimus,ex numeri multiplicantis in eum qui multiplicandus eſt, ductu, velut amborum fœtus procreatur,per multiplicationem nobis inueſtigandus. Numerus is qui multiplicat,ab eo quem multiplicare volumus,eo dinoſcitur, quòd numerus multiplicans per aduerbium ſemper exprimitur,multiplicandus autem per nomē. vti ſi ter ſeptem dicas, ternarius numerus multiplicās eſt:ſeptenarius,multiplicandus. Illud in primis animaduertendum eſt:Vnum nec ſeipſum neque alium numerum multiplicare. Nempe ſemel vnū nihil eſt niſi vnū: quatuor ſemel, nihil amplius ſunt quàm quatuor. Et vt facillima quæque primum expediamus: Si quis aliquem numerum per decem multiplicare velit, vnum ſolum circulum à dextra ei præponat,qui ſequentem numerum augebit in decuplum. Si numerum quenuis per centum multiplicare voles,duos à dextra præpone ei circulos, & numerus qui ſequitur, augebitur in centuplum. Sin per mille numerum quemlibet multiplicare cupimus:tribus à dextra adiectis circulis, auctus eſt in millecuplū. Atque itidem ſiquis per eum numerum, quem aliquis quantumuis vlterior numerorū locus ſignificat,alium numerum multiplicare deſtinat: is totidem eidem aſcribens circulos,quot locum illum repræſentare poſſunt, multiplicationem abſoluet.

Principio ad numeros omnes expedite multiplicandos non parum nobis cōducet in memoria reconditum habere,quem nume-

rum ſinguli primarij infra decem, alius in alium ducti procreent: id quod ex numerorum velut in tabula depictorum quadam deſcriptione facile deprehendi poteſt. Ea autem eſt huiuſmodi, A ſiniſtra ab vno incipiens, ac naturali numerorum ſerie in dextram progrediens, ſingulos primarios vſque ad decem, modicis interuallis ſcribe. Deinde ab illo ipſo vno ad ſiniſtram poſito, velut à quodam vertice iterum incipiẽs, eandem numerorum ſeriem, deorſum verſus tendẽdo, modicis & paribus interuallis diſtingue: ſingulóſque primarios vſque ad decem ita ſcribe, vt numerorum vtraque ſeries velut Pythagoræ normam angulum rectum facientem nobis depingat. Poſtea ſub prima ſerie, quæ à læua in dextram tendit, à binario numero incipiens, aliam decem numerorum ſeriem contexe: in qua ſinguli numeri, qui in dextram progrediuntur, binarij incrementum accipiant. ea ſeries deſinat in viginti. Tertius rurſus ordo decem numerorum à ternario numero ad ſiniſtram exordium ſumens deſinat in triginta, ſingulique numeri in dextrã protenſi incremento ternarij augeantur. Quartus itidem ordo à quaternario initium capiens, atque per decem numeros in dextrã progrediens, ſingulis auctis adijciat quaternarium, deſinátque in quadraginta. Quinta ſimiliter ſeries à quinario procedens per decẽ numeros quinario quenque auctos, finiatur in quinquaginta. Sextus ordo à ſenario ad læuam orſus, per decẽ numeros ſenario quẽque auctos, ad ſexaginta pertẽdat. Septima quoque ſeries à ſeptenario exorſa, ſingulis auctis numeris ſeptenarij incremẽtũ adijciat, in ſeptuaginta deſinens. Octauus ordo ab octonario ad octoginta perueniat: octonarij augmẽtum ad ſingulos auctos numeros accõmodans. Nona ſeries ſimiliter à nouenario progrediens ad nonaginta, per numeros decem nouenario quenque creſcentes protendatur. Decimus ordo à denario procedens ſequentes numeros, denario ſingulos augeat, deſinátque in centum. Deinde numeris ita ſcriptis, lineæ parallelæ inter ſingulos ordines directe ſic ducantur, tam à ſummo vertice ad imum cadentes, quàm trãſuerſæ à læua in dextram, vt eiuſmodi linearũ ductu ſinguli numeri quadratis locellis vbique concludantur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

HAEC numerorum figura mira quadam proprietate primariorum numerorum multiplicationē nobis ante oculos è veſtigio demonſtrat. Nam ſi ſcire cupis quem numerum duo quilibet primarij in ſe ducti creent: primum illorum alterum in ſerie ſuprema à ſiniſtra in dextram protenſa perquire. deinde alterum veſtiga in prima ad ſiniſtrā ſerie deſcendente. quos ambos cū inueneris, ab altero inter parallelas lineas recta ſemita deſcendens, ab altero in tranſuerſum parallelas duces ſequens, progredere: donec ad linearum in quadrāgularē formā coeuntiū locellū angularē peruenias: in quo numerū quem requiris, ex amborū in ſe ductu procreatum deprehendes. Verbi gratia, ſi vis ſcire quem numerum ſepties octo procreent: in altera ſerie ſeptem, in altera octo quære: parallelâſque vtriuſque numeri, alteras deſcendentes, alteras tranſuerſas, velut duces ſequere, donec in quadrangularem coeant figuram. in cuius angulari locello quinquaginta ſex notata inuenies. Atque itidē in reliquis numeris primarijs. Verūtamē, vt ante dixi, qui ſine vlla mora numeros multiplicare velit, primariorū inter ſe multipli

cationem in memoria,velut in numero,recónditam habere debet, vt expedite, cum res poſcet,ſingulos numeros ex primariorum in ſe ductu generatos,tanquam ex theſauro depromat:id quod paucis horis quiuis vel infirma memoria facile poteſt ediſcere. Alioqui ſi ad numerorum figuram ſuprà nobis depictam identidem reſpiciendum erit: quid fiet quando librorum non adeſt copia? Ne igitur in leuiculis ſemper ſit hærendum:paucarum horarum induſtria longi temporis tedium deuoret: vt quoties vſus poſtulabit, numerorum primariorum multiplicationem mente prius repoſitam memoria ſuppeditet.Id quod ad numerorum quoque partitionem nõ minus cõferet: vti latius dicemus quãdo eò vẽtum erit.

QVÒD SI cui eſt animus eiuſmodi numerorum figuram in tãtam amplitudinem dilatare,vt magnos etiam numeros per linearum inſpectionem cõpendio quodam multiplicare poſſit: Ab vno exorſus, quemadmodum antè diximus, naturalem numerorũ ſeriem,quantum ei libuerit, quantúmque in immenſum velit,tam à ſiniſtra in dextram progrediens, quàm à vertice deorſum deſcendens extendat:ſingulóſque contexens ordines illud ſemper obſeruet,vt à quo numero initium ſeries noua capiet, illius incremento ſinguli eius numeri ſequentes augeantur.

Præter cæteras quoque egregias huius figuræ dotes ab Arithmeticis traditas,quas nunc altius attingere noſtri inſtituti non eſt:illa inſignis habetur: Quòd ſi ab vno,qui numerus ad læuam ſummus eſt, ad centũ qui ad dextrã habetur imus,per angulos oppoſitos linea ducatur:numeri omnes quos ſecabit, quadrati reperientur,qui ex cuiuſque eorum in ſeipſum ductu procreãtur. id quod eueniret,ſi quantumuis in immenſum pertenderet figura. Ad hæc vbicunque occurrunt numeri quadrati, idem ex ductu angulorũ oppoſitorum in oppoſitos producetur,vt ſi tria per tria multiplicentur,perinde ſit acſi vnum in nouem ducatur.quod quia ad radicum in numeris inueſtigationẽ,(de qua ſuo loco dicturi ſumus) pernouiſſe eſt vtile:hîc deguſtaſſe,non alienum eſt viſum.

QVI de numerandi ſcripſerũt arte,de ſimplicibus numeris inter ſe multiplicandis,certam hanc dederunt regulam:quæ ſanè & breuis eſt,& ſupputationem auſpicãtibus admodum vtilis:vt duo quiuis numeri primarij multiplicandi ſumantur:maioríſque numeri, ſi alter maior fuerit, à denario diſtantia capiatur. Deinde quot in ea diſtantia reperientur vnitates, toties minor numerus à ſuo denario quem ipſe denominat, ſubtrahatur: & numerus reli-

ctus erit is quem quærimus. Verbi gratia, Scire volens quotũ nu-
merũ componat quinquies ſeptem: ſume tria, diſtantiam ſeptena-
rij, qui maior eſt numerus. ac ter aufer quinque, numerum mino-
rem, à denario, quẽ denominat, hoc eſt à quinquaginta. ſuperſunt
triginta quinque: quæ ex horum in ſe ductu procreantur. Sin nu-
meri æquales fuerint: nihil refert vtrius à denario diſtãtiã aſſumas:
vt quot in ipſa diſtantia deprehẽdas vnitates, toties à denario, quẽ
alter denominabit, alterũ numerum demas. vti ſi octies octo mul-
tiplicandi ſunt: ſume duo, diſtantiam vtriuſque à denario: bíſque
aufer octo ab octoginta. reliquũ erit ſexaginta quatuor. is eſt nu-
merus quem requirimus, ex illorum in ſe ductu generatus. Alij au
tem ad multiplicationẽ numerorũ primariorum, quorum duo qui-
uis additi maiorem denario numerum procreant, aliã docuerunt
regulã: vt vterque numerus ad ſiniſtrã, alter ſub altero ſcribatur.
deinde vtriuſque à denario diſtãtia è regione ad dextram ponatur:
diſtantiáque altera per alteram multiplicentur: & quod productũ
erit, ſub linea ducta notetur. Deinde alterutrius diſtantia ab alte-
ro ſubtrahatur: & prius adiecto, ſiquid memoria ſeruat, ſubſcripto
numero, ex diſtantiarũ in ſe ductu procreato, à ſiniſtra locetur. vti
ſi ſexies octo multiplicare velis: ſuprà octo, infrà ſex repone. Po-
ſtea cõtra octo oppone pro diſtantia ad dextram duo. cõtra ſex op
pone quatuor. duc poſtea duo in quatuor: fiunt octo. ea ſubſcribã-
tur. Exime deinde per oppoſitos angulos, vel duo à ſex: vel ſi ma-
uis, quatuor ab octo. ſuperſunt quatuor. ea à ſiniſtra numeri prius
ſubſcripti locentur. Quod ſi numeri primarij ſimul additi numerũ
denarium non trãſcendãt (hi autẽ ſunt omnes minores infra ſex)
eos ſine vllo præcepto pueri plerique omnes multiplicare ſciunt.

NVMEROS multiplicaturi, ſupremo loco eum ſcribamus quẽ
multiplicare deſtinamus: tum deinde inferius alterum per quem
multiplicare ſuperiorem volumus, ita reponamus, vt primarij nu-
meri illius ordinis primarijs ſuperioris, deni denis, centeni cente-
nis, & ſic deinceps reſpondeant. Et ſi numeri ſint inæquales: ma-
ior ſemper ſuprà pro multiplicando ponatur, minor infrà pro mul
tiplicante. Quo fiet, vt multiplicationis modus ſit expeditior. Po
ſtea ſub ambobus numeris à læua in dextram calamo 4 2 3
linea ducatur. 1 2

Deinde prima nota multiplicantis numeri in primã multi 3
plicãdi ducatur: & ſi id, quod ex multiplicatiõe proueniet, in 2
fra decem erit, ad dextram primo loco ſub linea reponatur. 6

Si verò ſurgat numerus aliquis ex denis collectus:ſubſcribatur circulus:& denorũ illorum denominatio memoriæ commendetur,ad ſequentis loci multiplicationem addenda.

5
4
0

SIN PRODEAT numerus aliquis ex denis & primarijs compoſitus:primarius primo loco deponatur,denorũmque denominatio mente recondatur: vt ad ſequẽtis loci numerum ex multiplicatione procreandum coniungi poſſit.

5
3
5

Iterum nota prima numeri multiplicantis ducatur in multiplicandi ſecũdam:& quod inde creatum erit, poſtquam ei additum fuerit id quod mente retẽtum eſt, ſi quid tale ex priore loco tranſlatum ſupereſt, ſecundo loco ſubſcribatur.

2 5
3
7 5

Rurſus eodem modo in tertiam,quartam, & reliquas quantum libet vlteriores multiplicandi numeri figuras eadẽ prima nota numeri multiplicantis ducatur: & quod ex ipſis in ſe ductis creabitur,eiſdem locis ſub linea reponatur quibus enatum erit. Demum prima illa multiplicantis nota,quæ ſuum peregit opus:ne amplius turbam faciat, obeliſco tranſfigatur.

2 1 2 5
3
6 3 7 5

Poſt hæc ſecunda numeri multiplicantis nota in primam multiplicandi,& deinceps in omnes reliquas,eo ordine,eodémque modo ducatur quo de prima nota fieri debere diximus. Et numeri ex eorum in ſe ductu proueniẽtes ita ſub linea & ſub figuris ex priore multiplicatione productis ponantur, vt primus eorum ſub ſecunda multiplicantis nota, ſecundus ſub tertia, tertius ſub quarta,& ſic deinceps in ſiniſtram procedẽdo locetur. Et quanuis pauciores notæ numeri multiplicantis, quàm multiplicãdi fuerint:ſemper tamẽ progreſſus in læuam à ſecunda nota multiplicantis exorſus,minimum per totidem ſeruetur locos, quot figuræ fuerint in numero multiplicando. poſtea ſecunda nota ſuum enixa fœtum calamo tranſfigatur.

2 1 2 5
1 3
6 3 7 5
2 1 2 5

Tertia deinde & quarta ac reliquæ omnes, quotquot fuerint multiplicãtis numeri notæ in ſingulas multiplicandi numeri eodem modo ducendæ ſunt: numeríque ex multiplicatione naſcentes ſub linea & ſub ordinibus ex priore multiplicatione procreatis ita reponendæ,vt tertiæ notæ multiplicantis fœtus à tertio loco,quartæ à quarto,& ſic deinceps, progreſſionis in ſiniſtram ca-

piat exordium:per totidémque notas minimum protendatur, quot reperientur in numero multiplicãdo. Singulæque notæ, poſtquam officio ſunt functæ, obeliſcis inductæ calamo tranſfigantur.

```
    2 1 2 5
    1 2 1 3
   ---------
    6 3 7 5
  2 1 2 5
4 2 5 0
2 1 2 5
```

Peracta demum figurarum omnium multiplicatione, rurſus ſub omnibus numerorum ordinibus ex multiplicatione procreatis altera linea à læua in dextram ducta, ad primum locum pertendat. Deinde à primo loco exorſi, omnes illos numeros ex figurarum in ſe ductu natos ſimul addamus, numeróſque ex locis ſingulis collectos eiſdẽ locis ſub linea ſubſcribamus. Ita numerus ſub linea repoſitus is erit quẽ multiplicatio nobis procreabit.

```
          2 1 2 5
          1 2 1 3
        ---------
          6 3 7 5
        2 1 2 5
      4 2 5 0
    2 1 2 5
  -------------
    2 5 7 7 6 2 5
```

De circulis autem illud præmonendum putamus, vt quoties in numero multiplicante nobis occurrit circulus, totidẽ ſub linea circulos reponamus quot fuerint figuræ numeri multiplicandi.

```
1 2 3
  1 0
-----
0 0 0
```

Quod ſi numerus multiplicandus circulum aliquem habeat, is etiam ſub linea ſuo ponatur loco: niſi aliquid in memoria retentum ſuperſit quod illic deponi debeat.

```
1 0 2    1 0 4
  1 3      1 3
-----    -----
3 0 6    3 1 2
```

NVNC EA quæ diximus, illuſtremus exemplis.

Multiplicemus ſeptem milia nongenta ſexaginta tria, per mille octingẽta quinquaginta duo. Poſtquam numeri ſcripti, ſubiectáque linea fuerit: ſic nobiſcũ tacite meditemur, Primo loco bis tria creãt ſex. ea ſub linea primo loco notamus. Iterum bis ſex faciunt duodecim. duo ſub linea ſecundo loco ponimus: vnum pro denarij denominatione mente retinemus. Rurſus bis nouem procreãt decẽ & octo. quibus vnum ex memoria addimus: fiunt decẽ & nouem. nouem igitur tertio loco lineæ ſubdimus: vnum mente recondimus. Demum bis ſeptem producunt quatuordecim, quæ quum augentur, vno ex memoria deprompto, fiunt quindecim. ſic quinque quarto loco reponimus: vnitatem in quintũ locum traſ-

```
          7 9 6 3
          1 8 5 2
        ---------
        1 5 9 2 6
      3 9 8 1 5
    6 3 7 0 4
    7 9 6 3
  ---------------
  1 4 7 4 7 4 7 6
```

ferimus: atque ita primam illam notam multiplicantis numeri, quæ ſuum peregit opus, obeliſco tranſfigimus. Poſtea ſecundam multiplicantis notam, nempe quinque, in primam multiplicandi ducamus, intra nos ita muſſitantes, Ter quinque creant quindecim. quinque ſecundo loco ſub linea ponimus: vnum mente ſeruamus. Iterum, quinquies ſex faciũt triginta. quibus vnum ex memoria depromitur, fiunt triginta vnum. ex his vnum tertio loco reponimus: tria mente ſeruantur. Rurſus, quinquies nouem producunt quadraginta quinque: quibus tria ex memoria addita, quadraginta octo faciũt. octo quarto loco ſubſcribimus, quatuor mẽte retentis. Demum quinquies ſeptem ſunt triginta quinque. his ex memoria quatuor adiungantur: fient triginta nouem. ea ſub linea ponantur ad ſiniſtram. ita ſecunda multiplicantis nota ſuum enixa fœtum obeliſco ſignatur. Tertiam deinde multiplicantis figuram aſſumentes, ſic ducimus in primam multiplicandi, Octies tria ſunt viginti quatuor. quatuor tertio loco lineæ ſubdimus: duo mẽte retinemꝰ. Iterũ, octies ſex ſũt quadraginta octo. ad quæ duobus ex memoria additis fiunt quinquaginta. circulus igitur quarto loco ſubſcribitur: & quinque memoria ſeruat. Rurſus, octies nouem ſunt ſeptuaginta duo: quibus memoria ſumminiſtrat quinque, ſic fiunt ſeptuaginta ſeptem. ſubnotantur ſeptem loco quinto, depoſitis apud memoriam ſeptem. Denique octies ſeptem ſunt quinquaginta ſex: ad quæ quum ſeptem ante repoſita iunguntur, proueniunt ſexaginta tria. ea ſexto & ſeptimo loco ſubſcribuntur: tranſfigitúrque ita calamo tertia multiplicantis figura. Tandem ventum eſt ad quartam & poſtremam multiplicantis notam: quæ, cum ſit vnitas, & nullum numerum multiplicare poſſit, omnes figuræ numeri multiplicandi, eo ordine quo ſunt ſcriptæ, ſemel ſub reliquis enatorum numerorum ordinibus ſic ponantur, vt prima quarto loco ſub ipſa vnitate notetur: reliquǽque omnes in ſiniſtram, nempe ſecunda in quintum locum, tertia in ſextum, quarta in ſeptimum, promoueantur. His ita peractis, ac ſub omnibus enatis numeris linea à læua in dextram ad primum vſque locum perducta, vniuerſorum numerorũ ex multiplicatione prouenientium ſumma collecta ſub linea deponatur. ea erit, Quater decies millena millia, ſeptingenta quadraginta ſeptem millia, quadringenta ſeptuaginta ſex.

SED quoniam in hoc exemplo quod iam explicauimus, nulli interuenerunt circuli: alterum adiungamus, in quo tam in nume-

ro multiplicante, quàm multiplicando, circuli ſint admixti. id autem ſit eiuſmodi.

				6	0	5	0	3
					4	0	2	0
				0	0	0	0	0
			1	2	1	0	0	6
		0	0	0	0	0		
2	4	2	0	1	2			
2	4	3	2	2	2	0	6	0

Multiplicemus ſexaginta millia quingenta tria, per quatuor millia & viginti. Poſt numeros ſcriptos lineámque ſubiectã, primũ nobis occurrit in numero multiplicante circulus. totidẽ igitur circulos ſub linea reponamus quot ſunt notæ numeri multiplicãdi. Deinde ſecunda nota multiplicantis in primam multiplicandi ducatur, inde ſex enaſcentur. ea ſecũdo loco ſubſcribantur. Et quia ſecunda figura numeri multiplicantis circulus eſt, ex quo nihil gigni poteſt: is tertio loco ſubnotetur. Rurſus ſecunda multiplicantis nota in tertiam, nempe quinque, ducatur: & fient decem. ſubijcitur igitur quarto loco circulus, vnúmque memoriæ ſeruãdum commendatur. Et quia quarta figura numeri multiplicandi circulus eſt, & vnum adhuc memoria ſeruat: id ſub linea quinto loco reponatur. Deinde ſecunda ipſa multiplicantis nota in quintam multiplicandi, nempe ſex, ducta, duodecim proueniunt. ea ſexto & ſeptimo loco ſtatuantur. poſtea ſecunda ipſa multiplicantis nota ſuo functa officio calamo tranſfigatur. Iterum tertio loco in numero multiplicante alter occurrit circulus. quamobrem totidem circuli quot reperiuntur figuræ numeri multiplicandi, à tertio loco incipientes, in læuam promouentur. Quarta nota numeri multiplicantis quaternaria in primam multiplicandi ternariam ducta duodecim producit. duo quarto loco ſubſcribuntur: vnum mente reconditur. & quia ſecunda numeri multiplicandi figura circulus eſt, vnum illud mente retentum quinto loco deponitur. Rurſus quarta multiplicantis nota in tertiam, videlicet quinque, ducitur. prodeunt viginti. circulus itaque ſexto loco ſubditur, duobus memoria repoſitis. Et quia in numero multiplicando alter itidem circulus eſt obuius: duo illa mente recõdita ſeptimo loco ſub linea locãtur. Demum quarta nota numeri multiplicãtis in quintam & poſtremã multiplicandi ducatur: & enaſcẽtur viginti quatuor. ea octauo loco & nono deponantur. Poſt abſolutam multiplicationẽ, ſub omnibus ordinibus linea perducatur, ſub qua vniuerſorum fœtuũ collecta ſumma cõtinebit, Ducenties quadragies ter millena millia, ducenta viginti duo millia, & ſexaginta.

Quæret fortaſſe quiſpiã, cur ita ſinguli numeri ex multiplicatione

procreati ſemper ad læuã oblique promoueantur: & nõ potius directe ſub numero multiplicãdo collocẽtur. Sed quiſquis multiplicationis naturã altius conſyderabit, ſtatim mirari deſinet. Nã cum multiplicatio toties numerũ qui multiplicatur, ſibi ipſi addat atque accumulet, quoties numerus qui eũ multiplicat, continet vnitatem: oportet omnino alium numerum maiorem inueſtigari, ad quem is qui multiplicatur, vicem habeat vnitatis. Et quoniã vnitas natura primũ in numeris locum tenet, ſequentes autem eam numeri in vlteriores ſedes ſecundum ſui augmentum truduntur: quiſquis numerus vnitatis vicem occupabit, is primam itidem ſedem habeat neceſſe eſt, & quæ ipſum ſequuntur in vlteriores ſedes promoueat. Cum itaque numerus multiplicans nõ ſolum in omnes multiplicandi notas ducatur, verũetiam ei leges præſcribat quoties ad inueſtigationẽ numeri maioris, vnitatis vicem ſit ſubiturus: neceſſe eſt omnino & tot maiorũ numerorum procreãdos ordines poni, quot ſunt notæ numeri multiplicãtis: & rurſus illos ipſos ordines à ſingulis numeri multiplicantis notis quæ repræſentandis vnitatibus legem dant, nouas ſubinde primas ſedes accipere. Atque ita ſi primus locus qui dux cæteris eſt, ab ea ſede incipiet vbi nota multiplicans ſita eſt, ſiue ſecunda, ſiue tertia, ſiue vlterior fuerit: omnes omnino loci, qui eius ductum ſequuntur, vlteriores erunt. Et cum maiores numeri ex notarum in ſe ductu ſemper quærantur: ſtatim vt ſunt inuenti, in ſiniſtram, quæ maiorum numerorum ſedes eſt, promoueri debent.

Multiplicationem recte factam eſſe certa ratione probabimus, ſi numerus ex multiplicatione procreatus per numerum multiplicantem diuidatur, & ſectio nobis numerum qui multiplicatus eſt, inſtauret. Quòd ſi alium numerum reddat, erratum eſſe neceſſe eſt. Hoc autem manifeſtius fiet, poſtquam numerorum partitionem explicuerimus.

DVPLICATIO numerorum eſt eorum per duo multiplicatio. Fit autem quando nota binaria poſita ſub primo loco numeri multiplicandi, ducitur in omnes eius figuras eo modo quo antè dictũ eſt. de qua, cum ſit ſpecies multiplicationis atque ea quidem lõge omniũ facillima, nihil attinet ſeparatim præcepta dare, ſicut quidam fecerunt: non magis quàm de triplicatione, quadruplicatione, reliquiſque multiplicationis ſpeciebus, quæ ſunt infinitæ. De quibus adhuc nemo quicquam ſpeciatim edidit. quanquam in multis earũ, quòd ſint difficiliores, maior videri potuiſſet

ratio ſiquis id attigiſſet. Verũ in his omnibus quomodo multiplicatio ſit facienda: ea, quæ iam dicta ſunt, abunde ſumminiſtrant.

DE PARTITIONE.

PARTITIO numerorũ eſt numeri diuidendi per numerum diuiſorem ſectio in quaſuis partes: quarum quælibet toties cõtineat vnitatem, quoties numerus diuidendus capit diuiſorem. Numerus autem diuiſor, vel minor diuidendo, vel ei æqualis eſſe debet. Porrò maior numerus non diuidit minorẽ: cum in minore maior nõ contineatur. Et vt manifeſtius ſectionis naturã explicemus, Numerorum partitio eſt partium quarumuis, quotæcunque fuerint, procreatio ex numeri diuidẽdi ſectione per numerũ diuiſorem, partes illas quas quærimus, denominantem. Quantitas autem illarũ partium ita deprehenditur: ſi à numero, qui diuidendus eſt, diuiſorem toties ſubtrahamus quoties fieri poteſt, diligenter obſeruantes quoties id faciemus. nam quoties ſubtractio repetita erit, toties numerus quem quærimus, vnitatẽ continebit. Ita nihil aliud eſt numeros partiri, quàm per numeri diuiſoris crebram, ab eo qui diuiditur, ſubductionem, tertium numerũ procreare: qui ex tot cõſtet accumulatis vnitatibus, quot repetitis iterationibus diuiſor numerus à diuidẽdo ſubductus eſt. Partitionis enim officium eſt, nobis aperire quantum quælibet pars numeri diuidendi, quotacunque ſit, in ſe cõtinet, & quoties in numero diuidendo numerus diuiſor includitur.

QVEMADMODVM autẽ in multiplicatione prædiximus non mediocriter cõducere ſiquis memoria teneret quos numeros procrearent primarij numeri in ſe ducti: ita hoc loco admonendum putamus, numeros partituris ſuprà quàm dici poteſt, conferre, ſi ſine vlla mora dicere poſſint quibus ex numeris compoſiti ſint, quáſque in partes ſoluantur ſinguli numeri ſub centum. Nam ſicut primariorum inter ſe multiplicatio numeros maiores creat, quorum tamen maximus centenarium nõ tranſcendit: ſic è conuerſo procreatorum ex primarijs numerorũ partitio ipſos in partes, ex quibus conſtant, diſſoluit: numeróſque oſtendit minores, ex quibus maiores ſunt accumulati. Et quanuis ſufficere poſſit ad vtrunque pernoſcendũ multiplicationis tabula ſuprà à nobis deſcripta, ſiquis eam ordine retrogrado conſyderet, & ab imis & maximis numeris cõtemplari incipiens ad ſummos & minimos tendat: tamen quo magis rem ſubijciamus oculis, quódque pro faci-

liori partitione mente cōcepimus, exprimamus, aliam partitionis tabulam non abſimilem,ordine tantū numerorum conuerſo,deſcribemus.quæ in ſumma parte,& ad ſiniſtram numeros maiores, in ima & ad dextram minores cōtineat. Ea fiet ad hunc modum, Ab ima parte ab vno incipientes,naturalíque numerorum ſerie in læuam progredientes, ſingulos primarios vſque ad decem modicis interuallis ſcribamus. Iterū ab illo ipſo vno ad dextram repoſito,velut à quadā baſi capientes exordium, eandem numerorum ſeriem ad decē vſque ſurſum verſus aſcendendo, modicis & paribus interuallis diſtinguamus:vt velut normā quandam rectū habentem angulum vtraque ſeries referat. Deinde ſingulos ordines ſtruentes illud obſeruemus,vt à quo numero initium ſeriei alicuius ſumemus,ſiue binarius, ſiue ternarius,ſiue vlterior fuerit: eius incremento ſingulos eum ſequentes numeros in ſiniſtrā promotos augeamus. Parallelæ deinde lineæ inter ſingulos ordines ductæ tā à ſummo faſtigio ad imū cadentes,quàm tranſuerſæ à læua in dextrā,ſingulos notatos numeros quadratis includant locellis.

100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
90	81	72	63	54	45	36	27	18	9
80	72	64	56	48	40	32	24	16	8
70	63	56	49	42	35	28	21	14	7
60	54	48	42	36	30	24	18	12	6
50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

ITA CONTRA quàm in multiplicationis tabula deſcriptum eſt, ſummas & ſiniſtras partes maiores numeri ſtatim oculis occur rentes tenebunt. Quorum ſiquem per minorem partiri volemus, parallelas à maiori numero diuidendo, tam ad imum marginem, quàm ad dextrum latus ducentes, oculis ſequamur: vbi ſe nobis contuendos offerent numeri (ex quibus cõſtat) minores. quorum alter diuiſor erit, alter qui nobis indicet quoties à diuidendo diui ſor ipſe ſubductus eum totum exhauriat. Verum enimuero quiſquis huius tabellæ deſcriptæ vim memoria reconditã tenet, vt nõ ſolum quos numeros generent multiplicati primarij, dicere expedite poſſit: ſed etiam in quos primarios generati ipſi ſoluantur (id quod plurimum bidui exercitatione cuiuis licet aſſequi) is ſine vlla mora, numeros quantunuis magnos in partes quaſcunque velit facile partietur. Idque ita eſſe argumẽto eſt, quòd qui alioqui in diuidendis numeris hærent, propoſita multiplicationis tabella ſeſe confeſtim explicant. quam ſi ordine retrogrado mente repoſitã haberent, nihilo facilior illis eſſet multiplicatio quàm partitio.

MODVS autem expeditus quoſcũque partiendi numeros eiuſmodi eſt, vt primùm numerus diuidẽdus à dextro latere ſcribatur, & ab eius ſiniſtra numerus diuiſor. inter quos linea cadens media ponatur. Deinde ſub numero diuidẽdo duæ lineæ parallelæ modico interuallo inter ſe diſtantes à læua in dextrã ducantur. ſub quibus iterum diuiſor numerus ſic ſubnotetur, vt vltima nota diuiſoris ad ſiniſtram ſub vltima diuidẽdi, & penultima ſub penultima, & ſic deinceps locetur. Atque id quidem ita fiet, ſi totus numerus diuiſor à diuidendi notis ſupra ſe repoſitis ſubduci poteſt.

CAETERVM ſi maior fuerit diuiſor, quàm diuidendi numeri notæ ſupra ſe locatæ, vt ab his non poſſit totus ſubtrahi: tunc poſtrema diuiſoris figura ſub penultima diuidendi ponatur.

HIC quidem numerus parallelis ſubiectus, diuiſor ambulans non abs re dici poteſt: quòd ad ſiniſtram ſemper incipiens, poſtquam à diuidendo numero ſubductus eſt, figuris ſuis deletis progrediatur ad dextram. ille verò ad læuam lineæ cadentis poſitus, diuiſor ſtans non immerito vocatur, quòd manens nos admoneat quis numerus ſit diuiſor. Inter parallelas verò numerus is ponatur medius, qui nobis indicat quoties in diuidendo numero diuiſor continetur, vt ab illo toties huius fiat ſubductio. vulgus hunc numerum quotientem barbare vocat, participium effingens ab aduerbio. is nobis videtur apte appellari poſſe numerus

partitionis,aut ſi mauis, numerus ſectionis, quòd ex maioris numeri ſectione generetur.

ET VT à facillimis primùm incipiamus: Si quem numerum in decem partes diuidere volemus,primam à dextra parte notam,per lineam cadentem mediam ſeparemus à cæteris:& peracta eſt partitio. ſi in centum:duas primas ſeiungamus notas.ſi in mille: ſeponamus tres. ſi in decem millia:quatuor diſtinguamus. Et vt in vniuerſum præcipiamus, Quandocunque maiores numeros partiri volumus, per minorem numerũ vnitatis nota & vno circulo aut pluribus ſcriptum , quem aliqua numerorum ſedes ſignificat, totidem à dextra per lineam cadentem notas ſeparemus, quot locum illum præcedunt.& abſoluetur partitio.Notæ autem à cæteris ſeparatæ reliquum indicabunt quod ex diuiſione ſupereſt: & ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita notentur.is locus eſt eius reliqui,quod poſt partitionem peractam remanebit. Id ita eſſe palàm eſt.nam ſi vna nota ad dextram appoſita ſequentem numerum vltra id quod ipſa ſignificat,augebit in decuplum,duæ additæ eodem modo in centuplum, tres in millecuplum , & ſic deinceps:illæ ipſæ ſublatæ datum incrementum omnino tollent.

SI VERÒ diuiſor numerus per quem partiri velis,vnicam notam habet , is ſub vltima diuidendi numeri figura , ſiue ipſi diuidendo æqualis,ſiue eo minor fuerit,ponatur. Et ſi diuiſor ipſe diuidendo numero æqualis erit:quia tantũ ſemel ab eo ſubduci poteſt:vnitatis nota ſub diuidẽdo inter parallelas inſeratur. Statimque tam diuiſor ſub lineis , quàm prima diuidendi figura calamo tranſfigatur: & diuiſor in dextrã ambulans ſub penultima diuidẽdi nota iterũ reponatur. Quòd ſi diuidendo numero minor erit diuiſor,cõſyderandũ erit quoties diuidendus eum cõtineat, an ſemel,an bis,an ſæpius,numerúſque id indicans inter lineas parallelas ſub diuidendo ponatur.ſi ſemel, vnitatis nota reponenda. ſi bis:nota binarij.ſi ter,ternarij.& ſic deinceps.Tum per illum numerũ inter parallelas repoſitũ diuiſor multiplicandus eſt, numerúſque ex multiplicatione proueniens ſub parallelis infra diuiſorem(prius tamẽ,ne rationes cõturbet,deletũ)ponatur. íſque numerus à diuidẽdo ſupra parallelas locato ſubducatur. & ſiquid reliquũ erit,ſupra diuidẽdi figuras,à quibus fit ſubtractio,prius deletas ne rationẽ cõturbent,ſcribatur.Quo facto,deleatur etiã numer9 ſubductus ſub parallelis repoſit9: & diuiſor in dextrã progrediẽs ite-

rum ſub penultima diuidendi figura locetur. Vbi animaduertendum erit, quoties penultima diuidendi cum toto reliquo ſupra vltimam diuidendi poſito (ſi quod fuerit) contineat diuiſorem. Ipſum autem reliquum ad reſpectum penultimæ diuidendi, & quoties in progreſſu occurret, ad ſequentium reſpectum, denarium illum numerum quem nota ipſum exprimens denominat, ſemper ſignificabit: vt ſi vnitatis nota in reliquo ſit, decem exprimat: ſi binarij, viginti: ſi ternarij, triginta: & ſic deinceps. Numerus verò ipſe indicans, quoties penultima diuidendi cum reliquo capit diuiſorem, inter parallelas eſt reponendus. Illud tamen perpetuo eſt obſeruandum, Quandocunque diuiſor in diuidendo ſæpius quàm nouies continetur, nouem inter lineas tantum ſunt reponenda. Per numerum autem ipſum inter parallelas poſitum multiplicãdus eſt diuiſor: & numerus ex eo proueniẽs, ſi vna nota ſcribi poſſit, ſub diuiſore prius deleto, ne rationes conturbet, reponatur.

SIN numerus ille proueniens ex denario & primario ſit cõpoſitus, vt duabus notis ſignari debeat: primarius ſemper ſub diuiſore ponatur: denarius autem ab eius ſiniſtra ſub reliquo diuidendi, ſi quod fuerit, aut ſub alia ipſius diuidendi figura ſupra ſe poſita ſtatuatur. numerúſque is ab ipſis diuidendi figuris ſupra ſe poſitis ſubducatur: poſtea deleantur notæ, tam quæ ſubductæ ſunt, quàm à quibus fit deductio. & ſiquid ex hac ſubductione iterum erit reliquum, ſupra penultimam diuidendi notetur.

DEINDE diuiſor in dextram obambulans ſub nota proxima penultimæ diuidendi rurſus collocetur: & itidem per omnia fiat quemadmodum in penultima. Atque ad hunc modum diuiſor promoueri debet, donec ad primam diuidendi figuram ventum erit: vbi ſiquid ex deductione reliquum ſupererit, id ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita notetur. qui locus eſt eius reliqui quod poſt diuiſionem peractam remanet. quod certe ſemper minus erit quàm diuiſor, niſi in partitione fuerit erratum.

Quotieſcunque autẽ poſt priorem ſubductionem inter partiendum cõtinget diuiſorẽ maiorem eſſe notis diuidẽdi ſupra ſe locatis, vt ab his ſubduci nõ poſſit, toties inter lineas circulus ponatur. & per vnum locum progrediatur diuiſor, notæque illæ diuidendi, à quibus fieri ſubductio non potuit: ad reſpectum illius, ſub qua diuiſor locatus eſt, vel denorum, ſi in ſecundo ab ea loco, vel centenorũ, ſi in tertio poſita fuerint: in ſequenti diuiſoris ſubtractio-

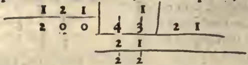
ne ſemper habebũtur. Et vt magis ea quæ diximus aperiam⁹ exẽplo, diuidamus ſeptem millia octingenta viginti quinque per ſex. Scriptis primũ diuidendo & diuiſore cũ parallelis medijs, eo modo quo diximus: ſic partitur⁹ ſecũ cogitet, Sex in

1	1			1
6	7	8	2	5
	1	3	0	4
	6	6	6	6
	1	8	2	4

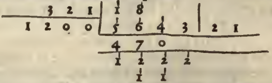
ſeptem ſemel tantum reperio. vnitatis igitur notã inter parallelas repono. & quia illa vnitas, ſex non multiplicat: ipſa ſex ſubduco à ſeptem: ſupereſt vnũ reliquum. id ſupra ſeptem calamo tranſfixa ſtatuo. deleóque ſex diuiſorẽ: & ſub penultima diuidẽdi iterum ea pono. Ibi occurrũt in reliquo & penultima diuidẽdi, decẽ & octo. ſex in his ter habentur. igitur tria inter parallelas depono: per quæ multiplico ſex, & fiunt decẽ & octo. decem ſub reliquo, octo ſub diuiſore prius deleto ſtatuo. deinde octo ab octo ſubduco, & nihil ſupereſt. vnitatis autem notã decem repræſentantem ſubtraho ab vno ſupra ſe poſito reliquum ſignante. Iterũ promoueo diuiſorẽ, & ſub proxima penultimæ eum colloco. ibi quia diuiſor maior eſt diuidendo, circulũ inter lineas inſero: deleóque diuiſorem, ac rurſus ſub prima diuidẽdi figura eum repono. Illic in diuidendo, vigintiquinque deprehendo. quorũ viginti ideo manent, quia diuiſor proxime, cum circulus lineis eſt inſertus, ab his ſubduci nõ potuit. in quibus, quia quater ſex habentur, quatuor inter lineas ſcribo: per quæ multiplico ſex, & fiunt viginti quatuor. Itaque ſub diuiſore deleto, quatuor ſubnoto: & ſub proxima diuidendi ſequente pono notã binarij, quæ viginti ſignificat. tunc quatuor à quinque in diuidẽdo numero ſupra ſe repoſitis deduco: & vnũ ſupereſt. duóque à duobus demo. poſtea tranſfigo calamo tam ſubductos numeros, quàm à quibus ſubducti ſunt. Vnúmque quod poſt diuiſionem peractam manet reliquum, ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita colloco. Ita numerus indicans, quoties facta ſit ſubductio, ſurgit inter lineas, Mille trecenta quatuor.

PRAETEREA ſi diuiſor numerus vnicam notam ſignificãtem cum vno circulo aut pluribus habeat, totidem diuidendi numeri figuras linea cadente interſerta ſeparemus à dextra, quot circuli in diuiſore notã ſignificantem præcedunt. Deinde per illam ſignificantem notam ſolam amotis circulis, diuidendũ numerũ eo modo partiamur, quo cũ vnica nota fieri debere diximus: præterquã quòd partitio, cũ ad ſeparatas per lineã figuras ventum erit, ceſſabit. & ſiquid reliquum ſupereſt ex ea diuiſoris ſubductione, quæ à

figura diuidendi proxime ſeparatas præcedente facta eſt , id vnà cum ipſis figuris ſeparatis totius partitionis reliquum erit. Atque ideò ſupra diuiſorem ſtantem,linea interpoſita,notetur.



QVOD SI diuiſor numerus duas aut plures habeat ſignificãtes notas, vnúmque aut plures in fine circulos : totidem in diuidendo numero ſimiliter à dextra ſeparandæ ſunt figuræ, quot circuli in diuiſore figuras ipſas antecedunt : & per illas ſignificantes notas ſolas amotis circulis, diuidendum numerum eo modo partiri oportet, quo cum pluribus notis fieri debere mox præcipiemus. ceſſétque partitio quando ad ſeparatas figuras veniemus: quas, vti iam dictum eſt, aſcribemus in reliquum.



QVANDO autem diuiſor duas aut plures ſignificantes notas habet : ſub diuidendo numero ductis parallelis ita ſingulæ ſcribantur, vt vltima diuiſoris ſub vltima diuidendi , penultima ſub penultima,& ſic deinceps,omnino reponantur. niſi totus diuiſor numerus maior eſſet totidem diuidendi figuris ſupra ſe locatis, vt ab his ſubduci non poſſet. nam tunc diuiſoris vltima ſub penultima diuidendi,& penultima ſub antepenultima , in initio ſtatui deberet, ſicuti antè dictum eſt. Quo peracto , conſyderandum eſt vtrum quoties vltima diuiſoris in vltima diuidendi ſupra ſe poſita reperitur , toties diuiſoris penultima in diuidendi penultima,& reliquo vltimæ,ſiquod poſt diuiſoris ſubtractionem ſupererit,& antepenultima diuiſoris in antepenultima diuidendi,& reliquo, ſiquod erit, & ſic per cæteras diuiſoris notas reperiri poſſit. & ſi id poſſit fieri , numerus indicans quoties diuiſor continetur, inter parallelas ponatur: & per eum ſingulæ diuiſoris notæ multiplicẽtur,ſuo quæque ordine:numeríque ex multiplicatione prouenientes ſub ipſis multiplicatis diuiſoris notis ſic ponantur,vt ſi figuris pluribus ſcribendi erunt, prima earum ſub nota multiplicata , reliquæ poſt eam ſuo ordine locentur. ſingulíſque numeri à

figuris diuidendi ſupra ſe poſitis, & à reliquo, ſi quod erit, ſubducantur: deletis tam diuiſoris quàm diuidendi notis, eo modo quo antè dictum eſt cum de diuiſore vnicam notam habente præciperetur.

3 2 1 | 9 6 . 3
3
3 2 1

AT SI penultima & antepenultima & quæuis alia diuiſoris nota toties non reperiatur in diuidendi figuris ſupra ſe locatis, & reliquo earundem, ſi quod erit, quoties vltima diuiſoris in vltima diuidendi continetur: tunc quia toties illæ à ſupra ſe repoſitis ſubduci non poſſunt, quoties hæc ab vltima diuidendi: ſubducamus vltimã diuiſoris ab vltima diuidẽdi ſemel minus, quàm alioqui ſubtrahi poſſet. & conſyderemus an reliquum quod ex vltima diuidẽdi figura ſupererit, penultimæ, antepenultimæ & cæteris eiuſdem figuris tantum ſubminiſtret quantum ad ſubductionem reliquarum diuiſoris notarum ferendam ſatis erit. Quòd ſi poſt id factum ſingulæ diuiſoris notæ à diuidendi figuris ſuprà ſe poſitis & à reliquo eiuſdem adhuc ſubduci nequeunt: vltimam diuiſoris bis minus, quàm alioqui ſubduci poſſet ab vltima diuidendi ſubtrahamus: & iterum conſyderemus an reliquum quod ſupererit, tantundem penultimæ & cæteris diuidendi figuris ſuppeditabit, quantum ſubductionem diuiſoris ferre poſſit.

QVÒD ſi neque bis minus ſubducere ſufficiat: tentemus an ter minus ſatis eſſe poſſit. Si ne id quidẽ procedit: experiamur an quater minus deducendo proficere poſſimus. Atque ita rariorẽ vltimæ diuiſoris ſubductionem ſubinde tentemus: donec reliquum quod in vltima diuidendi per hoc augebitur, cæteris eiuſdẽ figuris tantũ ſumminiſtret, quantum ad iuſtam ſubtractionẽ cæterarũ diuiſoris notarũ ferendam ſufficere poſſit. Ad id autem inueſtigãdum, partitionis tabella quã ſuprà deſcripſimus, inſpecta plurimũ rudes iuuabit: vt quoties ipſam rariorem ſubductionem in vltima diuidendi cõſyderant, ſemper interiores ab ea & dexteriores parallelas duces, quadrangularem formã minorem contrahentes, inſpiciant. quarum extremi in marginibus locelli facile indicabunt, quis numerus ſit ſumendus, quíſque futurum reliquum.

CVM verò conſyderando deprehenderimus quoties vltimæ diuiſoris ſubductio fieri debeat, vt cæteræ eiuſdem notæ à ſuprà poſitis ſimiliter ſubtrahi poſſint: numerũ id indicantem inter parallelas ſupra vltimã diuiſoris notam apponamus. & per illũ numerum quãlibet diuiſoris notam multiplicemus: prouenientémque

d.ij.

ex ſingulis multiplicationibus numerum ſub ipſis multiplicatis diuiſoris figuris ſic ponamus, vt ſi notis pluribus ſcribendus erit, primam earum ſemper ſub multiplicata figura, reliquas poſt eam ſuo ordine collocemus: eáſque à figuris diuidendi ſupra ſe locatis,& à reliquo,quando occurret,ſubtrahamus: delentes ſemper prius ipſas diuidendi figuras à quibus fit deductio. & quod ex ſingulis ſubtractionibus reliquum ſupererit, ſupra ipſas diuidendi figuras in quibus repertum eſt, prius deletas ſcribamus eo modo quo antè diximus de vnica præcipientes nota. Quandocunque autem in quouis reliquo aliqua nota retro manet nondum per ſubtractionem exhauſta, præcedénſque eam diuidendi figura, ex qua poſt ſubductionem nihil reliquum manſit, integre deletur: ſupra ponatur circulus, vt retro adhuc reſtantis reliqui nos admoneat,ſimúlque eius augeat ſignificationem.

QVOD cum peractum erit,ſingulæ diuiſoris notæ deletis prioribus, per vnum locum promoueantur in dextram: & vltima diuiſoris ſub penultima diuidendi,eiúſque penultima ſub diuidendi antepenultima, & ſic deinceps,locetur. Iterúmque de diuiſoris notis ſubducendis eodem modo conſyderandum eſt:eodem modo faciendum,quemadmodum iam dictum eſt.Rurſúſque ſubductione peracta,per vnum locum promouendus eſt diuiſor,atque eadem obſeruanda ſunt, donec prima diuiſoris nota ſub primam diuidendi venerit.vbi finietur opus.

ITAQVE ſi poſt ſubductionem quicquam remanſerit quod minus ſit quàm diuiſor: quia partitio finita eſt: ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita notetur, vt inde nobis appareat quota pars diuiſoris ſub linea ſubiecti ſit ipſum reliquum ſuprà poſitũ.

SI VERÒ reliquum ipſum maius ſit quàm diuiſor: quoniam errorem inter partiẽdum certum eſt interueniſſe: opus totum denuo repetendum eſt.

PRAETEREA quotieſcunque poſt vnam omnium diuiſoris notarum ſubductionem vſque ad finem operis diuiſor ipſe diuidendi notis ſupra ſe locatis maior reperitur,vt ab his nõ poſſit totus ſubduci: toties circulus inter parallelas eſt reponendus.& ſingulæ diuiſoris notæ nulla facta ſubductione per vnum locũ tranſferendæ ſunt in dextrã.Relictæ autem illæ diuidẽdi figuræ in proxima ſequẽti diuiſoris ſubductione debent exhauriri. Atque ideo ſi poſt conſummatã ſubtractionem in numero diuidendo circulus ad dextram ſupereſt: is inter parallelas à dextra collocetur.

ILLVD quoque etiam in hac partitione quæ per plures ſit diuiſoris notas perpetuo ſeruandum eſt , vt ſi aliqua diuiſoris nota ſæpius quàm nouies in diuidendi figuris ſupra ſe reperiatur, nouem tantum inter lineas ſint reponenda . quemadmodum in diuiſione per vnicam diuiſoris notam facienda ſuprà dictum eſt.

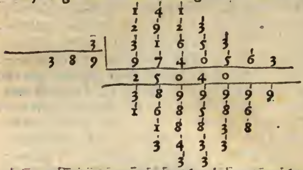
ET QVONIAM auſpicantibus præcepta ſine exemplis obſcura videri ſolent, exemplis illuſtremus ea quæ iam dicta ſunt.

```
           1
        5  9  1  2
47 | 2  9  1  5  4  1  0
        6  2  0  3  0
        4  7  7  7  7
           4  4  4
```

DIVIDAMVS bis millena millia noningenta quindecim millia, quadringenta decem, per quadraginta ſeptem . Scripto ſtatim numero diuidendo ſupra parallelas, ſub parallelis diuiſorem ſtatuamus. & quia ſub vltima diuidendi nota binaria, vltima diuiſoris nota quaternaria poni non poterit, quòd hæc illa ſit maior: ſub penultima diuidẽdi quæ nouem cõtinet, quatuor reponamus, & à dextra ſeptem. Deinde partiturus eiuſmodi quæ ſequuntur, ſecum tacitus muſſitet, Quatuor in figuris diuidendi ſuprà poſitis quæ viginti nouem denotant, ſepties reperio. ſepties enim quatuor, viginti octo creant, & adhuc vnum ſupereſt. verùm ſi ſepties ſumpſero quatuor, & vnum reliquum fecero, alteram diuiſoris notam ſeptenariam per ſeptem multiplicatam in figura diuidendi ſupra ſe poſita, & reliquo quæ vndecim continent, toties non reperiam. ſumo igitur ſexies quatuor ex viginti nouẽ, & quinque facio reliqua: vt vtraque diuiſoris nota toties in ſupra ſe locatis reperiatur: reponóque ſex inter lineas. & per ea multiplico quatuor, ſic fiunt viginti quatuor. igitur ſub multiplicata figura quaternaria prius deleta repono quatuor, & binarij notã quæ viginti ſignificat, poſt eam ſub vltima diuidendi colloco. Deinde quatuor à nouem ſuprà poſitis demo: quinque autem reliqua ſupra nouem noto: duóque etiam à duobus ſubduco, & vtraſque notas tranſfigo. Iterum multiplico ſex inter lineas poſita, per ſeptẽ alteram diuidendi notam: & procreo quadraginta duo, quorũ duo ſub multiplicata figura ſeptenaria repono: quaternariſque figurã quæ quadraginta ſignificat, poſt eã à ſiniſtra, prius ſeptẽ deletis, ſtatuo. Deinde quia

duo ab vno demere nō poſſum,aſſumo decē mutuo:& duo ab vndecim tollo,ſuperſunt nouē reliqua: quæ ſupra verticem ſigno.& quoniam decem mutuo ſumpſi, ſequentem notam quaternariam vno augeo. ſic quinque illa iam facta à quinque ſuprà ſe repoſitis ſubtraho,deleóque vtraſque notas. Atque ita poſt primam ſubductionem totius diuiſoris per numerū partitionis multiplicati, vtranque diuiſoris ipſius notā per vnum locū in dextram promoueo. Ibi diuiſoris notam quaternariā in nouem reliquis bis reperio, & tamen vnū ſupererit: quod cum quinaria diuidendi figura ſupra ſeptē locata ſatis erit ad ſeptem bis ſubtrahenda. duo igitur inter lineas depono. per ea multiplico quatuor,poſteriorem diuiſoris notā: & fiunt octo. ea ſubducuntur à nouē. vnum ſupereſt: quod ſupra nonariam diuidendi figuram prius deletam notatur, deleta ſimul etiam nota diuiſoris quaternaria. Rurſus ſeptē multiplico per duo: fiunt quatuordecim horū notam quaternariā ſub multiplicata figura ſeptenaria, vnitatis autē notam, quæ decē indicat, poſt eam ſub vno reliquo ſtatuo. deinde quatuor à quinque, & vnū ab vno reliquo ſupra ſe repoſito aufero: atque vtriſque notis deletis, vnū ex quinque relictum ſupra verticem noto. Rurſúſque poſt totius diuiſoris multiplicati ſubductionē vtranque eius notam per vnū locū in dextrā promoueo. vbi ſupra quatuor, vnitatis notam in diuidendo numero relictam: ſupra ſeptem, quatuor reperio. & quia quadraginta ſeptem in quatuordecim haberi nequeunt, nec vlla poteſt fieri ſubductio: circulo inter lineas inſerto, per vnum locum rurſus diuiſorem ad dextram tràſfero. ibi ſuprà quaternariam diuiſoris notam in diuidendo numero quatuor, & ex priore reliquo vnum quod decem denotat, comperio. ſic in qua tuordecim ter quatuor habentur, & duo erunt reliqua pro altera diuiſoris nota ſubducenda. tria itaque inter lineas depono, & per ea multiplico quatuor: fiunt duodecim. horū notam binariam ſub figura quaternaria multiplicata, vnitatem autem decem denotantem ſub reliquo ſubſigno. ſtatímque ea ſubduco à quatuordecim deletis: & duo ſuperſunt. multiplico deinde ſeptem per tria: vnde creantur viginti vnum. horum vnitatis notam ſub figura ſeptenaria multiplicata, notam autem binarij à ſiniſtra ſub reliquo pono: atque ea ſubtraho à ſuprà poſitis diuidēdi figuris, videlicet ab vnitatis nota & duobus reliquis. ſic nihil omnino ſupereſt. atque ita vtræque diuiſoris & diuidendi notæ deleantur. Veruntamen quan quam omnes numeri diuidendi ſignificantes notæ per ſubtractio-

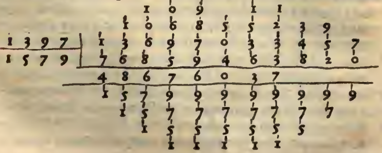
nem ſūt exhauſtæ: tamē quia in eo ſupereſt adhuc circulus,& partitio plene peracta nō eſt, propterea quòd nōdum prima diuiſoris nota ſub primā diuidendi ſucceſſerit: circulus ipſe inter lineas ad dextram recondatur. Ita numerus partitionis inter lineas competietur, Sexaginta duo millia,& triginta.



VNVM explicauimus pro rudibus exemplum: vbi duabus notis ſcriptus erat diuiſor. alterum aggrediamur, in quo tres notas, poſtremámque harū minimam, reliquas anteriores maiores habeat. cuiuſmodi exempla difficilius explicantur, quàm ſi poſtrema diuiſoris nota maior anterioribus eſſet. Diuidamus itaque nouies millena millia, ſeptingenta quadraginta millia, quingenta ſexaginta tria, per trecenta octoginta nouem. Et quum notas diuidendi & diuiſoris ſcripſerimus, duxerimúſque parallelas: ſub his diuiſorem ita ſtatuamus, vt vltima eius nota ſit ſub vltima diuidendi, penultima ſub penultima, antepenultima ſub antepenultima. Deinde conſyderemus quoties ternariam notam vltimam diuiſoris à nonaria diuidendi vltima poſſimus ſubducere: vt pro cæteris diuiſoris notis, quæ maiores ſunt, ſubtrahendis, ſatis ſuperſit. & bis id fieri poſſe deprehendemus. duo igitur inter parallelas ponimus. per quæ tria multiplicamus: fiunt ſex. ea ſubducimus à nouem. tria manent reliqua. ea ſupra poſtremam diuidendi deletam notamus, ſimul deleta etiam diuiſoris poſtrema. Iterum per duo multiplicemus mediam diuiſoris octonariam notam: ſurgunt ſexdecim. ſex ſub octo deletis, reponimus, vnitatíſque notam poſt octo ſub poſtrema diuiſoris. deinde & ſex à ſeptem demimus, & vnum reliquum ſuprà ſcribimus. vnitatis autem notam à tribus, quæ ex priore reliquo ſuperſunt, extrahimus, & duo relicta ſignamus ſupra verticem. deleantúrque figuræ, tam quæ ſubductæ ſunt, quàm à quibus fit ſubductio. Rurſus tertiam diuiſoris notam no-

nariam per duo multiplicemus, & fiunt decem & octo. quorum octo ſub nonaria deleta reponimus:vnitatis notam pro decē proximo ſequenti loco. Et quia octo à quatuor ſuprà poſitis ſubducere nō poſſumus,decem mutuo ſumptis, octo à quatuordecim ſubducimus. ita deletis notis,ſex relicta ſignantur ſupra verticem. pro illis autem decem aſſumptis vnum addimus ad ſequentem vnitatis notā quæ eſt ſub diuiſore: & duo illa, quia ab vno ſupra ſe repoſito auferre non licet,decem mutuantes ab vndecim tollimus. rurſúſque deletis notis, nouem relicta ſignamus ſupra verticem. Et quoniam decem iterum ſumpſimus: iterum ſequenti loco vnū à duobus ſuprà ſignatis demimus: vnúmque quod ſupereſt notamus,deleta nota binaria. Et quoniam ſemel omnes diuiſoris notas à ſuprà poſitis multiplicatas abſtulimus:eas per vnum locum ſingulas in dextram promouemus. Ibi iterum conſyderamus,quoties tria à decem & nouem ſuprà poſitis extrahi poſſunt. vt tamen ſatis ad cæterarum diuiſoris notarū ſubductionem ſuperſit: id quinquies fieri poſſe cōperimus . quinque igitur inter lineas ſuprà tria reconduntur. per ea,tria multiplicantur,& fiunt quindecim. quorum quinque ſub multiplicata figura ternaria reponuntur:& vnitatis nota pro decem loco ſequentī. deinde quinque ſubducuntur à nouem ſupra ſe poſitis: & quatuor reliqua ſuprà ſcribuntur. vnitatis autem nota ab vno reliquo tollitur:delentúrque figuræ. Multiplicatur deinde ſecūda octonaria diuiſoris nota per quinque. inde ſurgunt quadraginta. circulus itaque ſub octo locatur. & quaternaria nota quæ quadraginta ſignificat,poſt eum. ea ſubtrahitur à quatuor ſuprà poſitis:& vtraque nota trāſfigitur obeliſco. poſtea multiplicatur tertia nonaria diuiſoris nota per quinque:& creſcunt quadraginta quinque. quorum quinque ſub nouē collocantur:& loco ſequēti quatuor pro quadraginta. ſic quinque,quia circulus ſupra ſe notatur,à decē mutuo ſumptis auferūtur, & quinque manent:quæ ſupra circulum deletum annotantur. Et quoniā decem ſunt aſſumpta,vnū ad ſequentem quaternariā notam additur,atque ita quinque à ſex ſupra ſe locatis deducūtur. deletíſque figuris, vnū quod relictū eſt ſignatur ſupra verticē. Sic omnes diuiſoris notæ per quinq; multiplicatæ,& à ſuprà poſitis ſubductæ, per vnū locū ſingulæ tranſferūtur in dextrā. Et quia diuiſoris notæ in diuidendi figuris ſuprà ſe poſitis haberi nequeunt, circulus inter lineas inſeritur. rurſus per vnū locū ſingulæ diuiſoris notæ in dextrā procedūt. Ibi cōſyderamus quoties diuiſoris vltima ter-

naria à diuidendi notis ſuprà ſe locatis,quæ deſignant quindecim, tolli queat. & quanuis quinquies id fieri poſſit,ſemel tamē minus ſubducimus:vt ſequentium diuiſoris notarū habeatur ratio, quatuórque inter parallelas locamus. per ea multiplicamus tria, & fiunt duodecim. quorum nota binaria ſub tribus multiplicatis locatur:& vnitatis nota pro decem in ſede ſequenti. Deinde duo ſubducuntur à quinque , & tria reliqua manent. ea ſuprà ſcribuntur. vnitatis autem nota tollitur ab vno ſupra verticem poſito:ſtatímque delētur notæ,tā quæ ſubductæ ſunt,quàm à quibus fit ſubductio. Multiplicatur deinde octonaria diuiſoris nota per quatuor, & oriūtur triginta duo. horū duo ſub octo recōdūtur:ternaria nota loco ſequenti. Deinde duo illa demuntur à quinque: tria verò, quæ ex his ſuperſunt,in vertice notantur. ternaria autem diuiſoris nota à tribus quæ ſuprà notantur ,aufertur: delentúrque vtræque notæ. Poſtea tertia diuiſoris nota nonaria per quatuor multiplicatur:inde ſurgunt triginta ſex. horū ſex ſub nouē multiplicatis,ternaria nota loco ſequenti ſubnotatur. ea à ſupra ſe repoſitis auferūtur:nempe ſex à ſex,& ternaria nota à tribus. Deinde per vnum locum in dextram ſingulæ diuiſoris notæ rurſus procedunt. Et quia prima diuiſoris nota ſub primā diuidendi ſucceſſit,nihílque in diuidendo numero præter tria ſupereſt vnde fiat ſubductio : atque eapropter diuiſor in diuidēdo non reperitur: circulus inter lineas ad dextram reponitur . tria autē illa quæ partitione finita ſuperſunt,ſupra diuiſorē ſtantem,linea interpoſita notantur. Ita partitionis numerus inter lineas ſurgit,Viginti quinque millia & quadraginta,atque in reliquo tres trecēteſimæ octogeſimæ nonæ partes. Hactenus exempla expoſuiſſe ſufficiat, in quibus diuiſor plures habet notas. per hæc enim intellecta facile ſeſe quiuis explicare poteſt, etiā ſi diuiſor quatuor,aut quinque,pluréſve habeat notas. cuiuſmodi exemplū mēte cōſyderandū ſub oculis ſubiecimus.



IN OMNI autem ſectione quotieſcunque inter partiendũ poſt ſubductionem factã diuiſor in dextrã promouẽdus eſt: ſi reliquũ, quod in diuidendi notis ſupra diuiſoris verticẽ ſignatis,ex ea ſubductione ſupereſt,maius reperitur quàm totus diuiſor : error omnino admiſſus eſt.& fruſtra vlterius in ea partitione progrediendum eſſet,niſi quis operam perdere mallet. Quamobrem iterũ à capite repetendũ eſt opus. Nam non ſolum poſt peractã totã partitionẽ,reliquũ quod ſupereſt,toto diuiſore minus erit ſi recte proceſſit opus:verũ etiam in medio opere,quandocunque in dextram promouẽdus eſt diuiſor,idẽ euenire debet. Quæ res,ſi bene animaduerſa fuerit,non mediocre compendium , cum in omni partitione, tum præcipue in immenſis ſummis diuidendis afferet.

ILLVD obſeruare eſt operæprecium . Maior numerus minorem non diuidit,quippe quum in minore maior nõ contineatur: id quod huius capitis initio admonuimus. Cæterum ratio iniri poteſt qua maior numerus etiã minorẽ diuidere recte poſſit.id quod fiet , ſi de rebus à minore numero numeratis , prius vna in ſpecies ſub ſe cõtentas ducatur: vt earũ productus numerus diuiſore maior factus, eius ſectionẽ ferat. Veluti ſi inter ſeptẽ viros tres aureos partiri volumus , Quandoquidẽ in numero ternario numerus ſeptenarius nõ habetur , ſoluamus aureũ vnum in centum nummos ſeſtertios,quibus æſtimatur:centenariúmque numerũ per ternarium multiplicemus.& enaſcentur trecẽta. quæ deinde ſi in ſeptẽ partiamur: numerus ſectionis prodibit,quadraginta duo,& ſex ſeptimæ.Itaque ſi inter ſeptem viros tres aureos,centum nummis ſingulos æſtimatos, diſtribuamus:vnuſquiſque conſequetur quadraginta duos nummos,& præterea vnius nummi ſex ſeptimas.

AD HAEC maior numerus minorem frangere in minutias poteſt. id quod ſequenti libro de minutiarum partitione præcipientes,monſtrabimus.

QVISQVIS experiri cupit an numeros recte diuiſerit : numerum partitionis per diuiſorem multiplicet.& ſi ex ea multiplicatione atque ex reliquo,ſiquod ſupereſt,numerus diuidẽdus exibit: nihil errauit ſectio. Cæterũ ſi alius ex ea multiplicatione numerus,quàm diuidendus redibit: propter admiſſum in calculo errorem partitio tota denuo repetenda eſt. idque ita eſſe rerum natura monſtrat. Nam quemadmodum ſi partes quæ ab aliquo toto demptæ ſunt iterũ componantur , idem totũ redeat neceſſe eſt: ita ſi ex partium earundem inſtaurata compoſitione aliud totum

prodeat quàm antè fuerit:vel partes alienas per errorem eſſe ſumptas,vel eaſdem male iterũ coniunctas eſſe oportet. Cum itaque ex numero diuiſo per crebram diuiſoris ſubductionẽ exhauſto, peracta diuiſione nihil aliud ſuperſit quàm partitionis numerus, & reliquum ſi quod fuerit: ſi numerus ipſe diuiſor ad numerum partitionis reſtantem toties iterum addatur quoties antè ſubductus eſt(id quod facile fit,ſi numerum partitionis per diuiſorem multiplicemus,adiungamúſque reliquum, ſi quod remanebit) numerũ antè diſſectum denuo inſtaurari neceſſe eſt, quia & omne totũ cũ ſuis partibus conſentit,& pars quæ diſſentit,aliena eſt à toto.

DIMIDIATIO numerorum nihil aliud eſt, quàm eorum per duo ſectio:quæ certe & prima, & longe omnium facillima eſt ſpecies partitionis. Et quanuis non magni referat nulla de ea præcepta ſeparatim dare, cum ea quæ iam dicta ſunt,abunde ſufficiant: quia tamen minore tum linearum apparatu, tum conſyderatione ſpecies hæc partitionis eget quàm cæteræ:quæ,cum ſint innumerabiles,tum omnes hac difficiliores:operæpretium eſſe putauimus facilitatis eius compendium auſpicantibus enarrare. Neque enim duabus parallelis eſt opus:vnica tantum linea ſub diuidẽdo numero ducatur. Deinde numerum quenuis per medium ſecturus quiſpiam à ſiniſtra incipiens per omnes notas in dextram tendat. & ſi vltimus diuidendi numeri character nota ſit vnitatis,à penultimo ſectionẽ ordiatur:ſingulorúmque locorũ paribus numeris per mediũ ſectis,ipſum dimidiũ ſub linea locis ſingulis ſubijciat. Sin impar occurrit numerus,vnitate dẽpta,reliquum numerũ per medium ſecet: dimidiúmque ſub linea reponat. vnitas autem ipſa pro decẽ computata,memoriáque recondita ad ſequentem ſectionẽ ſeruetur:vt vel denariũ numerum creet,ſi circulus ad dextram proximus eſt:vel ex denario & primario compoſitum, ſi alia occurrit nota. Iſque numerus, ſi par eſt, per medium ſecetur. ſi impar,vnitate rurſus dempta,atque ad ſequentem ſectionem (vti iam dictum eſt)ſeruata,relictus numerus per medium diuidatur. Si verò in diuidendo numero priuſquam ad primam notam ventum erit, vnitas occurret:ſi nihil ſupereſt memoria retẽtum quod ei adiũgatur:ſub linea ponatur circulus:vnitáſque ipſa ad ſequentem ſectionem ſeruetur. ſemper autem dimidium ſub linea recondatur. Ita progrediendum eſt in dextram, vſque ad primam notã: quæ ſi circulus fuerit, & proximus ei numerus par repertus eſt: ſub linea ponatur. Sin proximus ei numerus impar cõpertus eſt,

à quo dempta vnitas mente retenta manet: circulus ipſe cum vnitate iunctus decem denotabit: quorum quinque quæ ſunt dimidium, ſub linea reponentur. Sin vnitatis fuerit nota: ſi denarius aliquis ex memoria ei adiungitur: vnitate dempta, decem ſunt ſecanda, & quinque ſub linea recondenda. ipſa autem vnitatis nota pro totius ſectionis reliquo, ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita, notetur: ſic ſcripta, vnius integri partem denotabit ſecundam, quæ dimidium capit. Itidem in reliqui locum transferetur vnitas, etiam ſi nullus denarius numerus memoria retentus ſupereſt qui cum ea iungatur. Numerus autem partitionis ſub linea diuidendo numero ſubiecta ſurgens apparebit.

Hæc quanuis propter facilitatem exēplo nihil egeant, vnum tamen pro rudibus adiungendum eſſe duximus.

```
 1    ·     ·
---
 2 | 1 1 4 1 0 3 1
     5 7 0 5 1 5
```

INVESTIGEMVS itaque dimidium in millenis millibus, centum quadraginta & vnis millibus, atque triginta vno. Scripto ſuis notis numero, ductâque ſub eo linea, quia vnitas in initio à ſiniſtra occurrit, incipimus à penultima, vbi etiam altera vnitas eſt. Itaque quoniam ibi vndecim habentur, vnitate pro denario ad ſequentem ſectionem ſeruata, decem relicta per medium ſecamus, & quinque ſub linea reponimus. Progredimur deinde ad proximum locum: vbi quatuor reperimus, quibus denarium ex memoria depromimus, vt fiant quatuordecim. horum dimidium, ſeptē, ſub linea locamus. Rurſúſque progredimur. ibi occurrit vnitas quæ ſecari non poteſt: ideo ſub linea circulus ponatur, & vnitas ſeruetur in ſequentem locum. In quo quia circulus occurrit, cui vnitas adiuncta decem faciunt, quinque ſub linea ſtatuemus. Denuo progredimur. ibi tria occurrunt: quorum vno quia numerus eſt impar, dempto, duo ſecamus: & horum alterum ſub linea condimus, denario numero mente in ſequentem ſectionem retento. Rurſus ad dextram progredimur ad primam vnitatis notam: cui decem ex memoria adiuncta creant vndecim. vnitate itaque dempta, decem per medium ſecamus, & horum quinque ſub linea reponimus. vnitatem autem illam ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita ſignamus, vt vnius integri partem ſecundam ſignificet. Ita partitionis numerus ſub linea manebit, Quingenta ſeptuaginta millia, quingenta quindecim.

DE PROGRESSIONE.

PROGRESSIO arithmetica eſt numerorum inter ſe æqualiter diſtantium in vnam ſummam collectio,& veluti compendium quoddam eos numeros numerandi qui paribus interuallis diſtant. Eius autem duæ ſunt ſpecies: Altera eſt, in qua naturali numerorum ſerie ſeruata,numerus quilibet ſequēs ſola vnitate præcedentem ſuperat,ſicuti in hoc exemplo,1.2.3.4.5 6.7.8.9. Altera in qua numeros quoſlibet omittentes, & paria ſeruantes interualla,longam numerorum ſeriem connectimus. veluti,1.3.5.7.9.11.13. In vtraque autem ſpecie idem eſt per compendium numeros colligendi modus. is autem hac bimembri conſtat regula . Si numerorum inter ſe æqualiter diſtantium , atque ordine continuo diſpoſitorum ſeries par occurret: eorum primus numerus iungatur cum poſtremo:numerúſque ex eis aggregatus per dimidium numeri loca ſeriei numerantis multiplicetur. Ita fiet,vt numerus ex hoc productus ſummam omnium commonſtret. veluti in hoc exemplo,1.2.3.4.5.6.7.8. primus numerus 1,ad poſtremū 8 addatur,& fient 9. Cúmque in tota ſerie ſint octo loca,ducamus 9 in 4 eorum dimidium, & prodibunt 36,quæ omniū eſt ſumma. Similiter ſi exempli cauſa proponantur,1.3.5.7.9.11. primus numerus ad poſtremū addatur, & fient 12. & cum in tota ſerie ſint ſex loca,ducamus 12 in eorum dimidium,nempe 3. ſic ſurgent 36, quæ ſumma eſt vniuerſorum. Quòd ſi numerorum à ſe æqualiter diſtātium atque ordine continuo diſpoſitorum ſeries erit impar, tunc numerus indicans quot loca ſunt in ſerie, non in eum numerum ducatur qui indicat quotus locus eſt in ſerie medius, ſed in eum numerū qui in ſerie medius reperitur, atque ab vtroque extremo æqualiter diſtat. Ita numerus procreatus omnium ſummā patefaciet. ſicuti in hoc exēplo,1.2.3.4.5.6.7. quia loca ſeriei ſunt ſeptem, & medius numerus eſt 4:7. in 4 ducamus,& fient 28. quæ ſumma eſt vniuerſorū. Itidem ſi exempli cauſa ſumantur,1.4.7.10.13. quia loca ſeriei ſunt quinque: & medius numerus eſt 7:5 in 7 ducamus & fient 35. quæ ſumma eſt omnium.

Alia regula datur magis generalis: & tamen non minus certa quàm eſt illa prior. ea autem eſt huiuſmodi, In omni progreſſione Arithmetica , ſiue ſeries par ſiue impar fuerit, numerus ab extremorum additione collectus in numerum indicantem quot loca ſunt in ſerie,multiplicetur . numerúſque productus poſtea di-

midietur, & ſumma progreſſionis habebitur. Exẽplum in ſerie pari,1.3.5.7.9.11. primus numerus additus ad poſtremum facit 12. & quia ſex loca ſeriei ſunt: 12 per 6 multiplicemus,& ſurgẽt 72. quæ ſi dimidientur , fient 36: quæ ſumma eſt progreſſionis. Exemplum in ſerie impari,1.4.7.10. 13. extremi numeri ſimul additi faciũt 14.& quia in ſerie ſunt quinque loca: 5 in 14 ducta, creãt 70. quæ ſi dimidientur,prodeũt 35. quæ ſumma reperietur vniuerſæ progreſſionis.

SI VIS experiri an recte ſummam collegeris, ab vniuerſa ſumma per compendium inueſtigata ſingulos in ſerie numeros ſubtrahe.& ſi nihil erit reliquum,recte collegiſti . Quòd ſi quid reliqui manſit,error interuenit.

Alia ſpecies progreſſionis habetur quam Geometricam vocant, in qua numerorum longo ordine diſpoſitorũ interualla ſunt inæqualia,quando inter numeros ſerie quadam connexos proportio aliqua reperitur,veluti dupla, tripla,quadrupla , aut ea maior. de qua in proportionum libro poſtea dicturi ſumus.

DE QVADRATI ET CVBI LATERIBVS INVESTIGANDIS.

DE QVADRATI & cubi lateribus exquirendis dicturos præfari primum pauca quædam nos oportet quis numerus ſit quadratus , quis cubus : quo magis de rebus notis præcepta daturi, cuncta intellectu faciliora reddamus . Numerus itaque quadratus eſt, qui ex vnico numeri cuiuſuis in ſe ductu cõſtituitur. cuiuſmodi numerus eſt quaternarius, qui ex vnico binarij numeri in ſe ductu procreatur . bina nanque ſemel in ſe ducta producũt quatuor. Similiter nouenarius numerus quadratus eſt. nam terna ſemel in ſe ducta educunt nouem . Itidem 16 quadratus eſt numerus. quippe quaterna in ſe ſemel ducta progenerãt ſexdecim . Ad eundem modum reliqui numeri omnes in ſe ſemel ducti, quadrati ideo dicũtur, quòd ſi diuiſim per vnitates ſcribantur , formam quadratam referant.

I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I

VNDE quemadmodum in corpore continuo quadrati latus appellatur , ſic in numeris latus quadrati numerus ille vocatur qui vnum è lateribus numeri quadrati perficit. quod Arithmetici quadrati radicem non inepte appellant: quod ex eius in ſe ductu numerus quadratus, velut ex radice quapiam arbor, ſurgat.

CVBVS numerus eſt qui ex numeri cuiuſuis ſemel in ſe atque iterum in numerum productum multiplicatione componitur: cu-

iuſmodi numerus eſt octonarius. nã bina in ſe ſemel ducta creant 4. iterum bina in 4 ducta, creãt 8. Similiter 27 numerus eſt cubus. terna enim in ſe ducta creant 9. iterúmque terna in nouem ducta faciunt 27. Itidem 64 numerus eſt cubus. quippe quaterna in ſe ſemel ducta educunt 16: iterúmque quaterna in 16 ducta procreãt 64. Atque ad eundem modum reliqui numeri omnes ſemel in ſe, atque iterum in numerum productum multiplicati, cubi ideo dicuntur, quòd ſi in corporum ſolidorum formam redigantur, ad exemplum cubi, tres dimenſiones æquales, nempe longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habere reperientur. Eſt autem cubus corpus ſolidum ſex continens planities quadratas, atque harũ latera duodecim, quorũ quatuor inferna ſunt, quatuor ſuperna, quatuor ab infernis ad ſuperna pertẽdunt: angulóſque habet octo, videlicet quatuor infernos, quatuor ſupernos, in quorum ſingulis terna latera coeunt. Latini teſſeram vocant. quanquam in numeris vocabulo ipſo græco latinitate iam donato magis vtuntur, vt cubum vocent. Cubi verò latus numerus ille dicitur, qui vnum è cubi lateribus efficit: & quadrati in eo contenti lateri æquale eſt. quod cubi radicẽ ſatis appoſite nuncupant, quemadmodum de quadrati latere iam admonuimus. Quocirca manifeſtum eſt, in omni numero cubo numerũ quadratum haberi: cæterũ non econuerſo reperies in omni quadrato cubum. Vnitatem autẽ Arithmetici & numerum quadratum, & cubum eſſe volunt.

IN huiuſmodi laterum exquiſitione magnum enaſcetur ſtudioſis compendium ad Arithmeticam pernoſcendam. per hanc enim Ptolemæus aſtrorum longe peritiſſimus, corporum ſupracæleſtiũ & ſphærarum magnitudines adinuenit, velocitatémque motuum in his deprehendit. Adhæc eius cognitio non modo Aſtrologiæ diſcendæ, verumetiam Geometriæ tãtopere conducit, vt ſine hac, quæ in his pulcherrima ſunt, intelligi nequeant.

VERVNTAMEN rerum ordo poſcit vt de quadrati latere inueſtigando prius dicere aggrediamur. Et cum quadrati lateris exquiſitio nihil aliud ſit, quàm numeri alicuius inuentio, qui in ſe ductus vel totum numerum propoſitum, ſi quadratus fuerit, producit: vel maximũ quadratũ in eo contentum, ſi ipſe non ſit quadratus: numerum ipſum latus facientem ſic inueſtigabis.

PRINCIPIO numerus quiuis, in quo quadrati radicem inueſtigare cupis, punctis ſupra verticem ſignetur in locis imparibus: videlicet primo, tertio, quinto, ſeptimo, nono, & reliquis iti-

dē. Et quia quadrati lateris inueſtigatio nihil aliud eſt quàm quædā diuiſionis ſpecies: ſub numero punctis notato duæ lineæ paral lelæ ducendæ ſunt. inter quas latus ipſum exquirendum ponatur quemadmodum in diuiſione præcepimus. quia quot adſcripta pūcta deprehendes, tot in numero ſectionis numeros primarios habebis numeri propoſiti radicem oſtendentes. Deinde ſub extrema ad ſiniſtram nota, puncto loco impari ſignata, numerus aliquis pri marius exquiratur, qui ſemel in ſe ductus totum reſpectu ſui loci numerum ſupra ſe repoſitum ſubductus aboleat: vel ſaltem quàm proxime fieri poteſt, ſi totum delere nequit. Huiuſmodi autem nu merus primarius inuentus inter parallelas inſerendus eſt, atque in ſe multiplicandus. & poſtquam numeri procreati facta erit ſubductio, reliquum ſi quod erit, ſupra notas à quibus fit ſubtractio, deletas è veſtigio, ne rationem conturbent, reponatur. Deinde numerus ipſe primarius duplicandus eſt, & duplum ſub proxima figura dexteriori ponendum. Quòd ſi ex duplicatione numerus duabus notis ſcribēdus prodeat: earum prima dextram verſus ſub proxima figura, quæ inter pūcto ſignatas media eſt, rēponi debet: Altera ſuo ordine ſequens ipſam ſub ea nota reponatur, ſub qua primarius numerus inuētus eſt, Iterum deinde alius numerus primarius exquirendus eſt, qui in duplum ductus totum numerum, qui ſupra duplum poſitus eſt, ita ſubtractus exhauriat, vt poſtea etiam in ſeipſum ductus totum numerum à dextra proximo pūcto ſignatum cum reliquo, ſi quod erit, abſorbeat. Sin totum auferre nequit, ab eo tollat quàm plurimum poteſt. Quod cum peractum erit, totus inter parallelas numerus duplicandus eſt, duplúmque ſub proxima figura dextram verſus ita ponendum, vt pri mi dupli nota ſub ea figura, quæ proxime inter puncto ſignatas media eſt, velut ad perpendiculum reponatur, aliæque poſt ipſam, ſuóque quæque ordine, tendentes in ſiniſtram. Rurſus deinde exquirendus eſt numerus aliquis primarius, qui in duplum ductus totū numerum qui ſupra duplum ſitus eſt, ſic ſubductus auferat, vt poſtea etiā in ſeipſum ductus numerū à dextra proximo puncto notatum vel totum deleat cum reliquo, ſi quod erit, vel quàm prope id fieri poteſt. Atque ad hunc modum progrediendum eſt ad primam vſque notam. Quotieſcunque autem poſt numeri primarij duplicati multiplicationem & ſubductionem, numerum ipſum primarium ducimus in ſeipſum: ſemper id ſub aliquo puncto fieri debet, ſtatímque è veſtigio quicquid inter parallelas in nume-

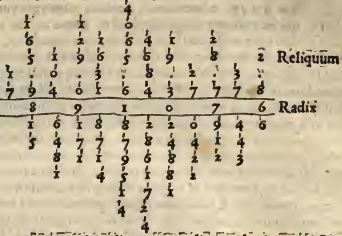
ro ſectionis reperitur duplicãdum eſt,& primi dupli nota ſub proxima inter puncta figura ad dextrã reponenda eſt,cæteráque poſt eam, ſuo ordine in ſiniſtram progredientes, quemadmodum iam diximus. Illud quoque diligenter obſeruandum eſt, Quandocunque in quauis inueſtigationis parte numerus aliquis primarius inueniri nequit,primũ in duplum,deinde in ſe ducendus:quin productus maior erit numero ſupra ſe locato, vt ab illo ſubduci non poſſit: tunc circulus ad numerum inter parallelas aſcribendus eſt, omnibúſque notis numeri cuius radicẽ quærimus, intactis dimiſſis,deletis tamen ſub parallelis dupli notis, progreſſus in dextram fiet, ſi nondum peractum eſt opus. totúſque inter parallelas numerus ita duplicetur, vt prima dupli nota circularis ſub proxima ad dextrã figura, quæ inter puncto ſignatas media eſt,reponatur: cæteráque poſt eam ſuo ordine in ſiniſtram tendentes, vt antẽ dictũ eſt. Peracta demum radicis inueſtigatione, ſi nihil reliquum erit, palàm eſt numerum propoſitũ cuius latus ſcrutati ſumus,quadratum eſſe. Quòd ſiquid reliquũ manſit,non erit quadratus,ſed numerus inter parallelas radix eſſe comperietur maximi numeri quadrati in eo contenti. Et quoniam obſcura ſine exemplis non facile intelligi queunt, exempla nunc adiungamus quæ cuncta magis illuſtrent.

```
   2
   8     7
   .  4  .  1  .     4   Reliquum
5  7  8  3  6  0  2  9
   7     6     0  .  5   Radix
   1  4  5  2  2  0
      1  1  5
```

Ex quinquagies ſepties millenis millibus,octingentis trigintaſex millibus,& viginti nouem,radicẽ eruamus. Poſtquam numeris ſuo ordine perſcriptis ductæ erunt parallelæ, locáque imparia punctis annotata:ſub poſtremo ad ſiniſtram numero puncto notato numerum aliquem primariũ quæramus, qui in ſe ductus vel totum numerum ſupra ſe notatum, qui eſt 57, vel quàm proxime fieri poteſt,ſubductus deleat. is autem erit ſeptenarius. nam 7 in ſe ducta,49 creant. quæ ſi ſubducantur à 57,ſuperſunt 8. itaque 7 inter parallelas inſerenda ſunt. ac poſt multiplicationem & ſubductionem factam deletis notis, 8 ſupra poſtremum punctum manebunt reliqua:quæ ſupra verticem notentur. Deinde 7 inter pa-

rallelas poſita duplicemus,& fient 14. quorum 4 ſub proxima ad dextram nota octonaria reponantur, & vnitas denarium numerū deſignans à ſiniſtra ſub numero octonario ex priori ſubductione relicto. Tum iterum inueniendus eſt numerus aliquis primarius, qui in quatuordecim quæ dupla ſunt ductus, numerum ſupra illa poſitum ſic auferat, vt poſtea in ſe ductus proximum à dextra numerum puncto notatum cum reliquo, ſiquod erit, ſubductus tollat, vel ſaltem quàm prope accedi poteſt. is autem erit ſenarius inter parallelas ſub proximo puncto inſerendus: per quem multiplicata 14, faciūt 84. quæ ab 88 ſupra ſe poſitis ſubducta relinquūt 4. Deinde ſex in ſe ducta creant 36. quæ à 43 ſupra ſe notatis exempta, reliqua faciunt 7 ſupra verticem numeri ternarij puncto proxime ſignati notāda. Iterū deinde duplicare oportet quicquid inter parallelas inuenitur. quocirca 76 duplicata faciunt 152. quorū prima nota 2, ſub proxima inter puncta figura ſenaria ponēda eſt à dextra: cæteræque poſt eam ſuo ordine à ſiniſtra. Deinde numerus aliquis primarius rurſus eſt quærendus, qui in totum duplum ductus, numerum ſupra ſe poſitum auferat. Sed quoniam is inueniri nequit, quòd numerus duplus 152 maior ſit numero ſupra ſe locato 76, circulus inter parallelas ſub proximo ad dextram puncto, ipſi inter parallelas numero addatur, notæque dupli ſub parallelis deleantur. Cæterum notæ numeri cuius radicem quærimus, maneant intactæ. Progrediamúrque in dextrā: & rurſus duplicemus totum inter parallelas numerum 760, ex ea duplicatione ſurgent 1520, quorum nota circularis ſub proxima ad dextram figura binaria, ponenda eſt inter pūcto ſignatas media: cæteræque poſt eam ſuo quæque ordine. Ac tum numerus aliquis primarius perquiratur: qui in totum duplum ductus numerum ſupra id locatū, ſubductus deleat: poſteáque in ſe ductus proximum à dextra numerum puncto ſignatum cum reliquo, ſiquod erit, auferat, vel ſaltem quàm proxime fieri poteſt: Is autem erit quinarius. 5 igitur inter parallelas reponentur. per eáque ſingulæ numeri dupli notæ ſeorſum multiplicentur: numeríque ex multiplicatione prouenientes ſubducantur à figuris ſupra ſe locatis: quæ ſtatim deleantur. Et demum in ſe ductus numerus ille quinarius ſubtrahatur à nouenario numero puncto notato: & 4 erunt relicta. Vnde ſatis liquet, quoniam toto opere abſoluto adhuc aliquid ſupereſt, numerum primo propoſitum nō fuiſſe quadratum. nam ſi quadratus fuiſſet, nihil manſiſſet reliquū. Hoc exemplo ſtudioſis quadrati lateris

inueſtigandi viam aperuiſſe ſuffecerit. Alterum plurium notarum oculis ſpectandum atque animo conſyderandũ adiungamus, quod facile ſine præeunte quiuis explicabit.



SI QVIS experiri velit an vera radix quadrati numeri ſit inuenta, radicem ipſam in ſe multiplicet, & ſiquid reliqui manſit, numero ex multiplicatione producto addat. quo fiet, vt niſi perperã facta ſit inueſtigatio, numerus primo propoſitus redeat. Quod ſi alius numerus prodit, opus repetendum eſt, vt error corrigatur. Ipſum autem reliquum æquare aliquando poteſt quadrati lateris inuenti duplum: ſuperare nunquã poteſt. vtputa, ſi numerus propoſitus eſſet 8, radix maximi numeri quadrati in eo contenti erit 2. quæ in ſe ducta creant 4. & 4 erunt relicta, quæ duplum radicis continent. Nam ſi 5 reliqua eſſent, iam fierẽt 9, quæ aliam radicem habent: videlicet 3. Itidem ſi propoſitus numerus eſſet 15, quadrata radix eius eſſet 3: quæ in ſe ducta faciunt 9, & 6 reliqua, quæ duplicatam radicem capiunt. At ſi relicta eſſent 7, prodirent 16, quæ aliam radicem, nempe 4, oſtentant. Similiter ſi numerus propoſitus eſſet 24, radix maximi numeri quadrati in eo contenti erit 4, quæ in ſe multiplicata faciunt 16, & 8 relinquuntur quæ duplum radicis continent. nam ſi reliqua eſſent 9, iam fierent 25, & ſurgeret alia radix, videlicet 5. Atque ad eundem modum deinceps cæteri numeri ſe habẽt. quamobrem ſi in reliquo plus reperias, quàm quadrati lateris inuenti duplum, errorem calculi palàm eſt interueniſſe.

DE RADICVM IN CVBIS INVESTIGATIONE.

IAM ANTE admonuimus, cubum numerum eum eſſe qui ex numeri cuiuſuis ſemel in ſe, atque iterum in numerum productum multiplicatione componitur. cuius latus inueſtigaturi: millenariorũ loca, punctis ſupra verticem adſcriptis, ſignemus. Ductis deinde ſub eo numero parallelis, quemadmodum de quadrato numero fieri præcepimus, ſub extremo ad ſiniſtram millenario numerus aliquis primarius exquiratur, qui ſemel in ſe, atque iterum in numerum productum multiplicatus, totum reſpectu ſui loci numerum ſupra ſe repoſitum ſubductus aboleat, vel ſaltem quàm plurimum poteſt, ſi totum auferre nequit. Huiuſmodi autem numerus primarius inuentus inter parallelas inſeratur, ſemélque in ſe atque iterum in numerum productum multiplicetur. & poſtquam numeri procreati facta erit ſubductio: reliquum ſiquod reſtabit, ſuprà notas à quibus fit ſubtractio deletas è veſtigio, ne rationem conturbent, reponatur. Quantum autem quiuis numerus primarius prius in ſe & deinde in numerum procreatum multiplicatus producat, nequis diu hæſitet, quæ ſequuntur, ante oculos poſita declarabunt.

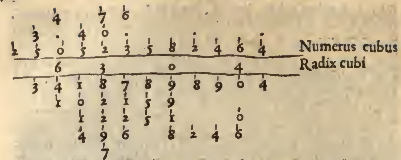
Semel	Vnum	Semel	1
Bis	Bina	Bis	8
Ter	Terna	Ter	27
Quater	Quaterna	Quater	64
Quinquies	Quina	Quinquies	125
Sexies	Sena	Sexies	216
Septies	Septena	Septies	343
Octies	Octona	Octies	512
Nouies	Nouena	Nouies	729
Decies	Dena	Decies	1000

DEINDE numerus ipſe primarius triplicandus eſt, & eius quod triplum erit prima nota ſub proxima figura præter vnam à dextra reponenda eſt, cæteræque poſt eã, ſuo quæque ordine à ſiniſtra. Poſtea exquirẽdus eſt numerus aliquis primarius, qui vnà cũ numero primario prius inuento, nũc pro denario cõputando ductus in totũ triplum, deinde ſolus in numerũ ex multiplicatione procreatum ductus, totum ſui loci reſpectu numerum ſupra ſe repoſitũ cum reliquo, ſiquod erit, ſubductus deleat. poſteáque etiam

ſolus in ſeipſum cubice, hoc eſt, prius in ſe, deinde in productũ multiplicatus, totũ numerũ à dextra proximo pũcto ſignatũ, cum præcedenti reliquo, ſi quod fuerit, exhauriat: aut ſi totũ auferre nequit, tollat ab eo quàm plurimũ poteſt. Quod cũ peractum erit, iterum triplicandum eſt quicquid in numero ſectionis inter parallelas continetur: & eius quod ex huiuſmodi triplicatione natũ erit, prima nota ſub proxima (præter vnam) figura à dextra reponatur: cæteræ autem poſt eam ſuo quæque ordine. Rurſúſque inueſtigandus eſt numerus aliquis primarius, qui vnà cum omnibus numeris primarijs prius inter parallelas inſertis ductus in totum triplũ, poſteáque ſine illis ſolus in numerũ ex multiplicatione natũ ductus, quicquid ſupra triplũ numerũ repoſitum eſt, vel totum abſorbeat, vel ex eo quàm plurimũ poteſt deleat. Deinde itidem cubice ſolus in ſeipſum ductus, totum numerũ à dextra proximo pũcto ſuppoſitum cum reliquo, ſi quod erit (modo fieri poſſit) auferat. alioqui ab eo quàm plurimum poteſt eximat. Poſt hæc denuo triplicandum eſt quicquid inter parallelas reperitur, & numerus alius primarius exquirendus, cæteráque vſque in finem operis ad eundem modum peragenda, quemadmodum iam dictum eſt. Quod ſi nihil reliqui mãſit: numerus, cuius radicem veſtigauimus, cubus erat. At ſi quid eſt relictũ: numerus nõ erat cubus. Cæterũ eruta radix latus eſt maximi numeri cubici in eo numero cõtenti.

VBICVNQVE autem in quauis inueſtigationis parte numerus aliquis primarius inueniri nequit qui vnà cũ alijs numeris primarijs prius inter parallelas inſertis in totum triplum ducatur: poſteáque ſolus in numerum procreatum multiplicetur (quin numerus productus maior erit numero ſupra ſe locato, vt ab illo ſub duci non poſſit) tunc circulus inter parallelas in numerum partitionis inſeratur. omnibúſque notis numeri, cuius radicem quærimus, intactis dimiſſis, deletíſque ſub parallelis tripli notis, ſi nondum finitum eſt opus, progreſſus in dextram vltra proximum numerum puncto ſignatũ fiat. totúſque inter parallelas numerus ita triplicetur, vt primi tripli nota circularis ſub proxima figura præter vnam vltra numerũ proximo puncto ſignatum, à dextra reponatur, cæteráque poſt eã, ſuo quæque ordine tendentes in ſiniſtrã.

EXEMPLA nunc afferamus quæ ſingula manifeſtent: atque ex ducenties quinquagies millies millenis millibus, quingenties vicies ter millenis millibus, quingẽtis octoginta duobus millibus, quadringentis ſexaginta quatuor, radicem cubicam eruamus.



STATIMQVE poſtquam numeri ſuo ordine perſcripti, ductæque ſubtus parallelæ,& millenariorum ſedes punctis erunt ſignatæ:ſub poſtremo ad ſiniſtram millenario pūcto notato numerus aliquis primarius exquiratur,qui ſemel in ſe, & iterum in numerum productum multiplicatus , vel totum numerum reſpectu ſui loci ſupra ſe repoſitū qui eſt 250, ſubductus deleat , vel ſaltem ex eo quàm plurimum poteſt auferat. Is numerus eſt ſenarius.nā ſexies ſena ſexies , 216 accumulant. quæ ſi ſubducas à 250, ſuperſunt 34. itaque 6 inter parallelas inſerenda ſunt . ac poſt multiplicationem & ſubductionem deletis notis, 34 pro reliquo ſic notanda ſunt,vt 4 ſupra poſtremum punctum notentur, & 3 ab eorum ſiniſtra . Deinde 6 inter parallelas poſita triplicemus, & ſurgent 18. quorū 8 ſub proxima nota præter vnā à dextra reponantur,à ſiniſtra 1. Tū inueſtigandus eſt numerus aliquis primarius, qui vnà cum numero primario prius inuento pro denario computando ductus in totū triplū,deinde ſolus in numerū procreatū ductus, totū eius loci reſpectu numerū ſuprà repoſitū ſubtractus ſic tollat,vt poſtea etiā ſolus cubice in ſe ductus vel totū numerū à dextra proximo puncto ſignatum,& reliquū, ſiquod præcedit,exhauriat,vel ſaltē ex eo quàm plurimū poteſt deleat. Is verò erit 3. quoniā nota ternaria locata à dextra ſenarij,quæ antè repoſita eſt, profert 63.quæ ducta in 18,creant 1134.deinde 3 ſola ducta in ipſa 1134,producunt 3402.quæ ſic ſubnotanda ſunt, vt prima nota ſub prima tripli figura reponatur , cæteræ ſuo ordine ſequentes poſt eā.quarū à ſupra ſe poſitis facta ſubductione,ſuperſunt 50.deinde 3 ſola in ſe cubice ducta faciūt 27, quorum 7 ſub numero ternario proximo pūcto ſignato,& 2 ab eorū ſiniſtra ſtatuenda ſunt. Horū tūc ſubtractione à ſupra ſe locatis notis facta,476 ſuperſunt.Deinde 63 quæ ſunt inter parallelas,triplicētur: & ſurgēt 189. quorū 9 ſub octonaria nota, quæ proxima figura præter vnā eſt, reponan-

tur,cæteræ poſt eã ſtatuantur à ſiniſtra. Rurſus inquirẽdus eſt numerus aliquis primarius,qui vnà cũ numeris primarijs antè inuẽtis prius in totũ triplũ,& poſtea ſolus in numerũ productũ multiplicatus, numerũ ſuprà repoſitum vel totũ ſubductus auferat, vel quàm plurimum ex eo poteſt. Id autem hoc loco fieri nequaquam poteſt. nã etiã ſi minimus numerus primarius,hoc eſt ipſa vnitas aſſumeretur ad 63,vt eſſent 631, eáque in triplũ,videlicet 189 ducerẽtur,& poſtea ſola vnitas in productũ multiplicaretur, ſurgerent 119259,quæ longe tranſcenderẽt numerum ſupra ſe repoſitũ 7658. Ita quoniã ſubductio fieri nullo modo poteſt,circulus inter parallelas ad numerum ſectionis apponatur. Sic omnibus notis numeri cuius radicem quærimus,intactis dimiſſis,deletiſque ſub parallelis tripli notis:facto vltra proximũ punctũ in dextrã progreſſu,quicquid inter parallelas eſt,hoc eſt 630,denuo triplicem⁹,& fiẽt 1890. quorum circulũ quæ prima tripli eſt nota, ſub figura ſenaria quæ proxima præter vnã eſt, vltra proximũ numerũ puncto notatum ſignemus:cæteráſque poſt eam ſuo quanque ordine. Rurſus deinde exquiramus numerũ aliquem primariũ,qui vnà cum 630 in numerum triplum 1890 ductus,poſteàque ſolus in numerum productum multiplicatus, numerũ ſupra ſe repoſitũ ſubductus ſic aboleat, vt poſtea etiam cubice ductus in ſeipſum, vel totum numerum à dextra proximo puncto ſignatum cum reliquo,ſiquod erit, vel quantum ex eo poteſt,deleat. Is autem eſt 4. nam 6304 in triplum numerum,videlicet 1890 ducta,producunt 11914560. Deinde 4 in ipſum numerũ productum multiplicata creant 47658240, quæ ſunt ſupra ſe poſitis notis præter poſtremam omnino æquales,atque eas ſubductæ delent. Poſtea 4 in ſe cubice ducta faciunt 64. quæ totum quod ſupereſt, ſic auferunt, vt nihil penitus ſuperſit. Numerum itaque propoſitum liquet fuiſſe cubum.

ET quoniam in cubi lateris inueſtigatione poſt triplicationem alicuius primarij numeri factam, ſtatim alius numerus primarius quærẽdus eſt,qui vnà cũ primario numero prius inuento in totũ triplum ducatur, deinde ſolus in productũ, atque iterum ſolus in ſe cubice multiplicetur(quia numerus ille primarius tam varie cõſyderandus eſt,primũ quid producit,quando pars eſt maioris numeri:iterum quid ſolus profert multiplicatus in productum, rurſus quid cubice in ſe ductus procreare valet)parũ exercitatos moratur hæc cogitatio quiſnã numerus primarius tot officia præſtare poſſit. Quamobrẽ,vt in cæteris omnibus, ita in hac re plurimũ

iuuabit exercitatio, quæ per aſſuetudinem, quantumuis ardua, pro-
na reddit. Cæterum non mediocriter conducet, ſi poſt numeri primarij inter parallelas poſiti triplicationem, priuſquam numerũ aliquẽ primariũ cum eo copulabis, circulũ ei adiũgas: tentéſque quẽ numerũ in triplũ ductus faciat. Deinde etiam tentari poteſt vnus aut alter numerus primarius, qui in triplum ſimiliter ducatur. & numerus ex hoc productus ad numerum priorem procreatum ex ductu numeri circulum aſſumentis addatur. Huiuſmodi enim numerorum productorum additio eundem proferet numerum, qui fuiſſet natus ſi ab initio numerus ille primarius quem tẽtauimus, vnà cũ numero primario prius inter parallelas poſito, fuiſſet in triplum ductus. Sic enim cũ videris quem numerũ ea multiplicatio atque additio procreabit, facile coniecturã capies tũ ex numeri ſuprà repoſiti, tũ ex numerorũ productorũ atque additorũ vel magnitudine, vel exilitate, quis numerus primarius aſſumpti circuli vicẽ ſubiturus maxime quadrabit. Veluti in exẽplo iam dato, poſt primam ſenarij numeri inter parallelas poſiti triplicationem ex qua fiũt 18, ſi quis aſſumens circulũ, 60 in 18 ducat, numerus productus erit 1080. Deinde tentemus, ſi 3 in 18 ducantur, quid fiat: & producẽtur 54. quæ ſi addantur ad 1080, ſurgent 1134. qui numerus ſimiliter prodijſſet ſi ab initio 63 in 18 fuiſſent ducta. Poſtea ſi tria in numerũ ipſum productũ 1134 ducantur, fient 3402. quæ ſatis apte reſpondẽt numeris ſupra ſe repoſitis, & tamẽ ſatis ſupererit, vt tria in ſe cubice poſtea ducãtur. At ſi per notã binarij id facere tẽtaremus, numerus ſuprà reponẽdus nimiũ redũdaret. ſi per 4 aut 5: numerus productus foret maior, quàm vt à ſupra ſe repoſitis poſſet ſubduci. Longe autẽ facillimũ erit, ſi poſtquam numerum inter parallelas poſitũ, adiuncto circulo, in triplũ duxiſti, primũ de numero quinario qui inter primarios medius eſt, eo modo tentes quo ſuprà dictũ eſt. Ita ſtatim ſcies, an maiore numero primario, an minore ſit opus. Ad eundem modum tentare proderit, quoties poſt triplicationem numerus aliquis primarius inquirendus eſt, qui ea officia præſtet, quæ paulo antè ſunt dicta. Hoc exẽplum explicuiſſe ſuffecerit, vt viam cubi lateris inueſtigandi daremus. Alterum pluriũ notarũ ſpectandum conſyderandúmque adiũgamus.

														2	Reliquum
		.			.			.			.			.	Numerus
6	5	9	7	7	5	4	1	0	6	7	1	6	1	8	non cubus.
		8			7			0			5			6	Radix cubi

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM SECVNDVM PRAEFATIO.

MVLTI qui in ſupputādis integris nihil hærent, poſtquam ad numerandas partes quæ nuſquam non ſunt obuiæ, ventum eſt, libellos abijciunt: non aliam (opinor) ob cauſam, quàm quòd non ſit tam expedita partium quàm integrorum numeratio. qui ſi ſecordia abiecta, animum intenderent: cuncta, quæ per nimias delicias corruptis animis ardua videntur, reperirēt prona. Nam vt integrorum numeratio penè à nemine ignoratur, qui modo ſenſum cōmunem habet, & eam vult perdiſcere: ſic quæ de partibus numerandis traduntur, vt non admodum acutam mentis aciem requirunt, ita poſcunt hominem nec dormitantem, nec ſtupidum, & cuius animus inter legendum minime peregrinetur. Et quanuis hæc non, ſicut AEſopi fabellæ, cum quadam voluptate penetrent intellectum: propterea tamē ſtudioſis nequaquam eſt ceſſandum. Cogitent quemadmodum pulcherrimis quibuſque difficultatem prætexuit rerum ipſa natura: quæ nihil, quod eſt magnū, cito prehendi voluit. ſimúlque ſecum reputent, quantus in tota vita pro tantillo ſtudio percipietur fructus. Nam quis (quæſo) mortalium vitam ſic poteſt tranſigere, vt non ſit ei frequenter habenda ſupputatio? in qua labi & decipi, præterquam quod damnoſum eſt, ridiculum putatur. Veruntamē hanc, quam nunc aggredimur, partium ſupputationem non magno egere acumine, vel hinc licet cognoſcere, quòd mercatores in hac nihil cedunt philoſophis: & neſcio an longe ſuperent. adeò magis induſtriam, quàm ingeniū poſtulat. Illud omnino præfandum eſſe duximus. Quiſquis integra ſupputare neſcit: is ne partium calculum putet ſe poſſe diſcere. Quippe qui nimium ingenio fretus ordine præpoſtero ſtolidus id tentabit: is ſimile quiddam facere videbitur, vt ſiquis ignorans literas, moliretur legere. Quamobrem illa omnes in promptu prius tenere debēt, quàm ad hæc accingantur. Alioqui, vt in adagio eſt, & operam & oleum perdent.

OMNE integrum in partes, quotcunque velis, ſolui per intellectum poteſt. Et quemadmodum integrorum numeratio ab vno incipit, atque in infinitum poteſt extendi, ſic integrorum ſectio à ſecundis orditur partibus. (Neque enim in pauciores partes quàm duas quicquam diſſolui poſſe rerum natura patitur.) In infinitum autem protenditur arbitrio ſecantis. Iterum partes ipſas in alias particulas, atque eas quidem innumeras, intellectus ſoluit. Particularúmque ipſarum rurſus alia fragmenta excogitari poſſunt, vt res finē habitura nō ſit, ſi cui minutias cōſectari libet. Ad eiuſmodi autē partes recte numerandas duo omnino requiruntur numeri. Alter qui partes diſſectorum numeret, quem Arithmetici numeratorē appellant: qui quot in ſe capit vnitates, tot partes diſſecti nobis repræſentat. Alter qui partibus ipſis ſua nomina tribuat, denominatorē eum vocant, quòd quot vnitates in ſe contineat, in tot partes totum quippiam diuiſum eſſe denotet. Vtpote tres quartæ, quæ ſunt tres partes alicuius integri in quatuor diuiſi. Scribuntur autem ita partes, vt numerator ſupra breuem lineā ductā: denominator infra eam ponatur, ad hūc modum $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ numeratórque ſemper prius pronuntiatur, quàm denominator: vt dicamus, duæ tertiæ, tres quartæ, quatuor quintæ.

VERVNTAMEN harum minutiarum quædam ſimplicia fragmenta dicuntur: hæ ſunt partes, in quas integra ſoluuntur. quædam fragmentorū fragmenta, quas minutiarū minutias Arithmetici vocare ſolent: hæ ſunt particulæ, in quas rurſus partes frangūtur. Nos in hoc libro, ſicut partes integrorū ſimplices, aliquando fragmenta, ſæpe etiam minutias indiſcriminatim vocabimus: itidem quoque appellabimus partium particulas, interdum minutiarum minutias, nonnunquam fragmentorum fragmenta. Inter quas ſpecies plurimum, cum in ſcribendo & in enuntiando, tum etiam in multis alijs intereſt. Nā quæ ſunt ſimplices minutiæ ſic ſcribuntur, vt breuis linea ſupra ſe numeratorē, infrà denominatorem habeat, vti iam diximus. Et ſi plura ſimplicia fragmenta ſcribēda ſūt, modico interuallo diſtinguūtur. ad hunc modū, $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ vnicúmque numeratorem, & vnicū denominatorem ſingulæ habent, & recto caſu ſemper enuntiantur, vt dicamus vna ſecunda, duæ tertiæ, tres quartæ. Quæ verò ſunt partium particulæ, duos

aut interdum plures & numeratores & denominatores capiunt. Quarum aliæ ad ſiniſtrã ponendæ recto enuntiãtur caſu, lineámque habent mediam: hæ ſunt ipſæ particulæ. Aliæ ad dextram locandæ, obliquóque caſu enũtiatæ media linea carẽt: hæ ſunt partes, quarũ ſunt particulæ: vt ſi duas tertias vnius quartæ notis ſcribere velis, ad hunc modum facias, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ Id autem ſignificatur, vt ſint duæ tertiæ partes vnius partis quartæ ab aliquo integro diſſectæ, quod in quatuor partitum eſt. Vel ſi tres quartas vnius tertiæ vnius ſecũdæ ſignare cupis, ad hũc modum notes, $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ quod exprimit tres quartas partes vnius partis tertiæ alicuius ſecundæ ab integro diſſectæ, quod in duo diuiſum eſt. Itaque dum fragmẽtorum fragmẽta ratiocinator tractat, ſummopere cauere debet ne dormitanti obrepat obliuio quarum partium ſint particulæ, néve pro diſſectis integrorum partibus partium fragmenta computet. Nam ſi id committat, error calculi non mediocris ſequetur. 1

SEMPER autem in omnibus diſſectorum minutijs, quo maior denominator fuerit; eo minores erunt partes, remotioréſque ab integris: & quo fuerit minor, eo partes maiores erunt, atque ad integra propius accedent. Nam duæ partes ſecundæ maiores ſunt quàm duæ tertiæ, & duæ tertiæ maiores quàm duæ quartæ, & duę quartæ maiores quàm duæ quintæ: & ſic in vniuerſum quãto magis numerando creſcit denominator, tanto magis quantitate partes diminuuntur.

AD numerationem autem partium plenius pernoſcendam, tria in primis obſeruanda ſunt. Primum, vt quandocunque numerator & denominator ſunt æquales: tunc partes vnum integrũ conſtituant. Exempli gratia, $\frac{3}{3}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{7}{7}$ tres tertiæ vnum integrum faciunt: ſic quinque quintæ, ſic ſeptẽ ſeptimæ, ſic id genus reliqua. Alterum illud eſt, quãdocunque numerator maior eſt denominatore, quot vnitatibus denominatorẽ numerator ſuperat, totidem partes plures ſunt quàm quæ integrum faciunt. vt nouem octauæ integrum & partem octauam faciunt, ſeptem quintæ integrum & duas quintas, ſex quartæ integrum & duas quartas. $\frac{9}{8}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{6}{4}$ Tertium eſt, vt quandocunque numerator minor eſt denominatore: quot vnitatibus numerator denominatore minor eſt, totidem partes deſint ad integrum cõponendum, vt duæ tertiæ ſunt duæ partes aliquius integri in tria diſſecti: quibus tertia pars deeſt ad integrum faciendum: Itidem tres quartæ quarta parte minus continent, quàm integrum. $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ Atque itidem in reliquis ſimilibus.

ITAQVE denominatoris augmentum partes quantitate quidem minores,numero verò plures reddit. Quemadmodum econuerſo numeratoris incrementum vel integra progignit, vel partes multo propiores integris.

AD HAEC cum omnis integrorum inter ſe multiplicatio & quantitate & numero maiorem edat fœtum,nempe numerũ productum : econtrario in partibus euenit, vt minutiæ multiplicatæ quantitate minores,numero plures comperiantur.

DE PARTIBVS DISSIMILIBVS AD SIMILITVDINEM REDIGENDIS.

CVM IN ſupputationibus faciendis partes aliæ alijs maiores,longéque diſſimiles frequenter occurrant,interdũ fragmentorum fragmenta ſimplicibus aggregata fragmentis,nõnunquã integra partibus intermixta : ne tam varium chaos rationes totas conturbet: eiuſmodi tam diuerſa prius ad ſimilitudinem quandam reducere neceſſe eſt,quàm ea vel addere,vel ſubtrahere,vel multiplicare,vel diuidere quiuis aggrediatur.quo fiet, vt operis æqualitas cuncta tum prona, tum facilia reddat : quando alioqui, ſiquis tam diſſimilia inter ſe committere tẽtaret,in labyrinthum inextricabilem ſeſe ingereret. Igitur antequã illa quiſpiam moliatur:hæc,quæ de diſſimilibus in vnam faciem redigendis præcepta ſequuntur,prius tenere curet.

SIVE autem maiores partes in minores mutare libet,ſiue ecõuerſo minores in maiores redigere:partes quælibet in quaſuis trãſformantur: ſi partium,quas transfigurare volumus numeratorem in denominatorem earum,in quas ſunt transformandæ,multiplicemus: & numerum ex hoc enatum per earum partium denominatorem, quas transfigurare eſt animus, diuidamus. Quo fiet, vt partitionis numerus partes illas edat, in quas fit transformatio. Quod quidem ſolum eruditis præcepiſſe ſuffecerit. Cæterũ vt rudium habeatur ratio: vtranque ſpeciem ſeorſum explicabimus. Itaque maiores partes in quaſuis minores transformantur: ſi maiorum partium numeratorem in denominatorem minorum multiplices, & numerum ex hoc enatum per maiorem denominatorẽ diuidas. Quo peracto numerus partitionis patefaciet quot partes minores ex maiorum transformatione naſcuntur. vt ſi tres quartas ad octauas transformare velis: per tria,maiorum partium numeratorem,octo minorum denominatorem multiplices : & pro-

deunt viginti quatuor. quæ deinde per quatuor maiorum denominatorem diuidas: & numerus partitionis ſex habebit. Ex tribus igitur quartis ad octauas reductis ſex octauæ conſurgunt. Et ſi duodecim tertias ad quintas tranſfigurare cupis: duodecim maiorum partium numeratorem, in quinque denominatorem minorum ducas, & ſexaginta naſcuntur: quæ per tria maiorum denominatorem diuidas, & numerus ſectionis viginti creabit. Sic ex duodecim tertijs, viginti quintæ generantur. Quòd ſi tres quintas ad ſeptimas vis reducere: per tria maiorum partium numeratorem, ſeptem denominatorem minorum multiplica: & procreabis viginti vnum. quæ poſtea per quinque maiorum denominatorem diuide: & numerus partitionis quatuor oſtendet. vnúmque reſtabit reliquum, quod vnam quintam vnius ſeptimæ ſignificat. Sic ex tribus quintis ad ſeptimas reductis fiunt quatuor ſeptimæ, & quinta pars vnius ſeptimæ. Nam quãdocunque in eiuſmodi reductione reliquũ occurrit, partis erit particula, denominationémque in recto caſu à maiorũ partium denominatore qui diuiſor extitit, ſumet, alterũ verò in caſu obliquo à denominatore minorũ.

MINORES partes è conuerſo in quaſlibet maiores tranſfigurãtur, quando per numeratorẽ minoris denominator maioris multiplicatur, & numerus inde proueniens per minoris denominatorem diuiditur. tunc enim numerus partitionis palàm indicabit quot partes maiores ex minorum tranſfiguratione ſurgunt: vt ſi ſex nonas in tertias quis commutare velit, per ſex minorum partium numeratorem, tria denominatorem maiorum multiplicet: & creabit decem & octo: quæ deinde per nouem minorum denominatorem diuidat, & in numero ſectionis duo comperiet. Itaque ex ſex nonis in tertias cõmutatis duæ tertiæ generantur. Et ſi duodecim ſextæ in quartas ſint mutandæ, duodecim numerator minorum partium in quatuor maiorum denominatorem ducantur, & progignũtur quadraginta octo: eáque poſtea per ſex denominatorem minorum diuidantur: & octo in numero partitionis erunt. Ita duodecim ſextæ reducuntur ad octo quartas. Quòd ſi ſeptem octauas ad quintas quis reducere cupiat, ſeptẽ numeratorem minorum partium, in quinque denominatorem maiorum ducat, & conficiet triginta quinque: quæ deinde per octo denominatorem minorũ diuidat, & numerus partitionis quatuor habebit, & reliquum ſupererit, tres octauæ vnius quintæ. Quamobrem ex ſeptem octauis in quintas commutatis quatuor quintæ oriuntur,

& tres octauæ vnius quintæ. Nā in eiuſmodi reductione fragmē-tum fragmenti quādocunque occurrit, denominationem in caſu recto à minoris fragmenti denominatore per quem fit ſectio, capit, denominationémque in obliquo à denominatore maioris.

DIVERSARVM denominationum partes ad eaſdem denominationes rediguntur, quando vnius fragmenti denominator per alterius denominatorē multiplicatur: nā numerus inde proueniēs denominator communis erit. vt ſi duas tertias & tres quartas ad eandem denominationem velis reducere, tria denominatorē primi fragmenti per quatuor denominatorem ſecundi multiplices: & enaſcentur duodecim denominator communis. $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$ 12.

QVÒD ſi ſcire cupis, quot duodecimæ partes ſeorſum ſint in duabus tertijs: duo numeratorem illius primi fragmenti, in quatuor denominatorem poſterioris ducas, & octo pro numeratore procreantur: quibus denominator cōmunis ſub linea ſuppoſitus indicat in duabus tertijs octo duodecimas deprehendi. $\frac{8}{12}$ Itidē ſi vis ſcire quot duodecimæ partes ſeorſum ſint in tribus quartis: tria numeratorem ipſius ſecundi fragmenti, in tria denominatorē primi multiplices, & nouem pro numeratore conſurgent: quibus denominator communis ſub linea ſubiectus demonſtrat in tribus quartis nouem duodecimas inueniri. $\frac{9}{12}$

DEINDE ſi ad cōmunem denominatorē numeratorem etiam cōmunem vis inueſtigare, prioris fragmenti numeratorē in denominatorē poſterioris, & ſimiliter numeratorē ſecundi fragmēti in prioris denominatorē, ad formā crucis diui Andreæ, multiplica: numeríque ex his duabus multiplicationibus proueniētes ſimul addātur: & numerus inde proueniēs numerator cōmunis erit. Vt ſi duo numerator primi fragmenti, in quatuor denominatorem ſecundi ducantur, fient octo. Et ſi tria ſecūdi fragmenti numerator, per tria denominatorem primi multiplicentur, ſurgent nouē: quæ addita ad octo faciunt ſeptendecim, qui numerus erit numerator communis. Ita duæ tertiæ & tres quartæ ad eandem denominationem reductæ numeratorem habent communem ſeptendecim, denominatorem verò duodecim. $\frac{17}{12}$

SI VERÒ plura fuerūt fragmenta, vti duæ tertiæ, tres quartæ, quatuor quintæ: poſt duo priora fragmenta, ſicuti diximus, reducta, iterum denominator communis prius inueſtigatus per tertij fragmenti denominatorem multiplicetur, & ſurgent ſexaginta omnium denominator communis. $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{17}{12}\ \frac{4}{5}$ 60

QVOD ſi ſcire cupis quot partes ſexageſimæ ſint in quouis fragmento, numeratorẽ ipſius fragmenti in denominatorẽ communem multiplica, nempe ſexaginta, numerúmque procreatum diuide per eiuſdem fragmenti denominatorem: ita deprehendes in duabus tertijs quadraginta ſexageſimas, $\frac{2}{3}$ $\frac{40}{60}$ & in tribus quartis quadraginta quinque ſexageſimas, $\frac{3}{4}$ $\frac{45}{60}$ & in quatuor quintis quadraginta octo ſexageſimas. $\frac{4}{5}$ $\frac{48}{60}$

DEINDE numeratorem omnium fragmentorum cõmunem inueſtigaturus prius reductorum fragmentorum numeratorẽ per denominatorem tertij, & numeratorem tertij per denominatorem fragmentorum prius reductorum multiplica. numeróſque ex his duabus multiplicationibus generatos ſimul adde, & numerator communis omnium fragmentorum prodibit. Vt ſi ſeptendecim, prius reductorum numeratorem communem, in quinque tertij fragmenti denominatorem ducamus, indéque procreemus octoginta quinque, & iterum duodecim communem prius reductorum denominatorem, in quatuor tertij fragmenti numeratorem multiplicemus, atque ita generemus quadraginta octo. hóſque duos numeros ſimul coniungamus, enaſcentur centum triginta tria. Is numerus erit omnium fragmentorum numerator communis. ſic duæ tertiæ, tres quartæ, & quatuor quintæ ad communem numeratorem & denominatorem reductæ, fiunt centum triginta tres ſexageſimæ. $\frac{133}{60}$ Eodem modo progrediendum eſt, etiam ſi plura fuerint fragmẽta ad eandem denominationem reducenda: vt primis quibuſque, quemadmodum diximus, expeditis, proxime ſequentia ad eundem modum abſoluantur, donec per omnia fragmenta ſit diſcurſum.

EX prædictis nimirum liquet numerũ ſtatim inueniri poſſe, qui partes quaſcunque volumus, denominatas habet. Quippe ſi partes omnes denominatas inter ſe multiplicemus, numerus procreatus partes eas cõtinebit. Exempli gratia, ſi numerũ aliquem cupis exquirere qui capiat vnam ſecundam, vnam tertiã, vnam quartam, vnam quintam, vnã ſextam, vnam ſeptimam, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ omnes has partium denominationes inter ſe multiplica: quæ generãt quinque millia & quadraginta: is eſt numerus quæſitus.

IN eiuſmodi autem numero ſinguli numeratores, partes plures vſque ad totidem cõtinere poſſunt, quot in denominatoribus ſingulis reperientur: nam in eodem etiam deprehendas vnam ſecundam, duas tertias, tres quartas, quatuor quintas, quinque

ſextas, ſex ſeptimas, $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}$ vel ſi mauis reperias duas ſecũdas, tres tertias, quatuor quartas, quinque quintas, ſex ſextas, ſeptẽ ſeptimas, $\frac{2}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{4}{4}\ \frac{5}{5}\ \frac{6}{6}\ \frac{7}{7}$ Partes autem vnius atque eiuſdem numeri plures in numeratore quàm in denominatore contineri nequeunt: nam is numerus ea ratione ſeipſa maior eſſet, quod eſt contra rerum naturam: veluti ſi quæras numerum qui quinque quartas habeat, fruſtra inueſtiges· quippe cum quinque quartæ vnum integrũ & quartam præterea partem cõſtituant. at nullus numerus quarta parte ſeipſo maior haberi poteſt. Minimus autẽ numerus qui partes quaſcũque velis denominatas habeat, quẽadmodum ſit inueſtigandus, paulo pòſt dicemus, quando trademus quomodo partes ad minimam ſui nomenclaturam redigantur.

PARTIVM particulæ quæ fragmentorum ſunt fragmenta, & minutiarum minutiæ etiam nuncupantur, in integrorum partes quas ſimplices vocant minutias mutantur, ſi earum numeratores inter ſe multiplicentur, vt vnus omnium communis numerator fiat: atque itidem earum denominatores in ſe ducantur, vt vnus omnium communis denominator enaſcatur. Ideòque ſi ad eandem denominationem reducere cupias duas tertias vnius quartæ vnius ſecundæ $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$ vnitatibus in duo ductis, tantum duo ſurgunt: cum vnitas alios numeros non multiplicet. ſic oritur numerator communis. Deinde tria in quatuor ducta creant duodecim, quæ iterum in duo multiplicata producunt viginti quatuor. ita compertus eſt denominator communis. Quamobrem duæ tertiæ vnius quartæ vnius ſecundæ ad ſimplicia fragmẽta redactæ, procreant duas vigeſimasquartas vnius integri. $\frac{2}{24}$

INTEGRA in partes quaſcunque volumus franguntur, ſi numerus integrorum per denominatorẽ illarum partium quas procreare cupimus, multiplicetur: quippe numerus ex multiplicatione generatus enatarum partium ſummam demonſtrabit. Etenim ſi integrum ad ſextas reducere eſt animus, vnitatem per ſex multiplicemus, & enaſcẽtur ſex: qui numerus erit partium. Si tria integra ad ſextas reſoluere libet, ſex in tria ducantur: ita fient decẽ & octo: qui numerus exiſtit partiũ, ſolutis in ſextas trib⁹ integris.

SIQVA vero integra vnà cum partibus occurrãt quæ ad partium denominationem reducere velimus, numerum integrorum per denominatorem partium multiplicemus, & numero procreato partium numeratorẽ addamus: indéque creſcenti numero eundem denominatorẽ ſupponamus, linea interpoſita. Exempli gra-

tia. ſi quinque integra & tres quartas ad eandem denominationẽ reducere cupimus, integrorum nota primum ſcribatur: deinde ante eam ad dextram, ipſum fragmentum, breui linea interſerta ad hunc modũ, 5 $\frac{3}{4}$. quinque deinde numerum integrorũ, per quatuor denominatorem fragmenti multiplicemus, & conſurgent viginti: quibus addita tria numeratorẽ communẽ viginti tria creãt. his ſub linea media, quatuor denominatorem ſubijciamus: ſic nobis enaſcentur ex hac reductione viginti tres quartæ $\frac{23}{4}$.

QVOD ſi integra & plura ſimplicia fragmenta ad vnum ſimplex fragmentum reducere quis velit, numerum integrorũ & primum fragmentũ, ſicuti iam præcepim9, abſoluat. Deinde fragmẽtum ſimplex ex hoc enatũ cum alijs ſequentibus copulando, per ſingula fragmenta diſcurrat, donec vniuerſa in eandem denominationem transformauerit eo modo quo ante dictum eſt.

SI VERO integra & partium particulæ ſimul reperiantur, & ad ſimplex fragmentum velis ea reducere, primum partium particulæ ad ſimplicia fragmenta reducendæ ſunt, ſicuti ante præceptum eſt: & tum demum integra cum his in eandem denominationem ſunt copulanda.

ITIDEMQVE per omnia fiet, ſi integra & plura fragmentorum fragmenta ſeſe ſimul offerant. his nanque omnibus prius ad ſimplicia fragmenta redactis, cætera ſeruentur quæ iam prædicta ſunt.

PARTES econuerſo reducuntur ad integra, ſi numeratorem ipſarum partium per earum denominatorẽ diuidamus. nã numerus partitionis integra cõtinebit. Vt ſi decem & octo tertiæ ad integra reducendæ ſint, decẽ & octo per tria diuidamus: & numerus partitionis prodibit ſex. totidẽ itaque ſunt integra. Vel ſi ex viginti duabus quartis integra procreãda ſint, viginti duo per quatuor ſecemus, & in numero partitionis quinque deprehendentur, atque duo reliqua. Igitur quinque fiunt integra: & duæ quartæ ſuperſunt. quia ſemper in omni diuiſione tam integrorum quàm partium, reliquum, ſi quod reſtabit, à diuiſore, per quem ſectio facta eſt, ſuam denominationem ſumet. Ipſum autem reliquũ, quod integrum creare nequit, eadem proportione ſe habet ad integrũ, ſicut numerator ad denominatorem, qui diuiſor extitit. Quocirca cum per integrum diuiſorem, id quod reliquum erit, amplius ſecari non poſſit, per dimidium diuiſoris, ſi modo is dimidiari poteſt, diuidatur: & numerus ſectionis dimidium oſtendet integri:

vti in exemplo proximo. vbi duæ quartæ ſuperſunt: per duo, diuiſoris dimidium, facta ſectio, cum numerus ſectionis ſit vnum, vnum dimidium monſtrat. Si verò id fieri non poteſt, per tertiam diuiſoris partem reliquum diuidatur, modo tantū ſuperſit: & numerus partitionis vel vnam tertiam vel plures indicabit ſupereſſe. Puta ſi per nouem numerus eſſet diuiſus, & ſex manerent reliqua: per tertiam diuiſoris partem, nempe tria, ſectio facta duas tertias vnius integri ſupereſſe manifeſtat. Alioqui ſi per tertiam ſectio non quadrabit, per diuiſoris partem quartam, niſi minus ea ſuperſit, reliquū ſecetur: quippe ſic facta ſectione, numerus partitionis patefaciet an vna quarta remaneat, an plures. Veluti ſi per ſexdecim numerus fuiſſet diuiſus, reliquáque eſſent duodecim: quarta diuiſoris pars pro reliquo ſecando ſumpta, in numero partitionis tria producit, quæ tres partes quartas vnius integri demonſtrant. Si nec id quidem procedit, tum de quinta aut ſexta, aut alia quauis diuiſoris parte, ad eundem modum tentādum. Cæterum ſi nihil horum iuuare poteſt, reliquū ipſum ad minimam ſui nomenclaturam redigendum eſt, his qui ſequuntur, modis.

PARTES reliquæ, quæ vnum integrū conficere non poſſunt, ad minimam ſui nomenclaturam rediguntur, ad hunc modum. Numerator & denominator toties dimidiādi ſunt, quoties id fieri poteſt: in ſingulíſque dimidiationibus, linea interpoſita, numerator ſupra eam, denominator infra ſcribatur: & poſtrema dimidiatio notetur. quia qua proportione ſe habebit ipſius numerator ad denominatorem ſubiectum, eadem primus numerator denominatorem ſuum reſpiciet. Et ſi in alterutro eorum inter dimidiandum impar occurrit numerus, quia amborum dimidiatio amplius progredi non poteſt, illic erit ſiſtendum. Continuóque maximus numerus ambos communiter numerans eſt inueſtigādus, qui eorum vtrunque per diuiſionem poſſit exhaurire.

MAXIMVS numerus duos communiter numerans ſic inueſtigatur. Numeratorem & denominatorem poſt dimidiationem ceſſantem, à ſeinuicem ſubtrahe, quoties id fieri poteſt. ex qua ſubductione frequenter repetita, ſi eorum alter ad vnitatem ſoluitur, eiuſmodi numeri contra ſe primi ab Arithmeticis vocantur: & ad minorem nomenclaturam redigi nequeunt, cum omnes numeri contra ſe primi ſua proportione ſint minimi. Exempli cauſa, reliquæ ſint viginti ſex quinquageſimæ, quas ad minimam nomenclaturam redigere velimus $\frac{26}{50}$: harum numerator dimidiatus re-

linquit tredecim. at denominator per medium ſectus creat viginti quinq;. ſic ex dimidiatione, tredecim vigeſimæ quintæ generãtur, $\frac{13}{25}$. Vltrà propter imparem in vtroque occurrentem numerũ dimidiatio non procedit: quanuis, etiam ſi in alterutro ſolo fuiſſet imparitas, dimidiatio ceſſaſſet. Quærendus eſt ergo per crebram alterius ab altero ſubductionem, maximus numerus ambos communiter numerans. In primíſque tredecim numeratorem à viginti quinque denominatore ſubducamus, & relinquemus duodecim, ea rurſus à tredecim numeratore ſubtrahamus: & vnum remanebit, quod nobis indicat numeros ex dimidiatione ceſſante repertos, contra ſe primos eſſe. $\frac{26}{50}$ $\frac{13}{25}$ $\frac{25 \quad 13}{12}$ $\frac{13 \quad 12}{1}$

QVÒD ſi crebra numeratoris & denominatoris ſubductione à ſeinuicem facta, neuter eorum ad vnitatem ſoluitur, tandem omnino reperientur ſimiles. Quod quando compertum eſt, ſimul inuentus eſt maximus numerus ambos communiter numerans: is videlicet, in quo ſimiles deprehendũtur: per quem dati reliqui numerator ſeorſum diuidẽdus eſt, atque itidem denominator: ſícque numerus vtriuſque ſectionis tam alterũ prioris numeratoris numeratorem ea proportione minimũ, quàm alterũ prioris denominatoris denominatorẽ, itidem etiam minimũ ea proportione demonſtrabit: qui minimam indicabunt nomenclaturam, ad quam partes redigi poſſunt. Atque ita manifeſtum eſt, maximum numerum duos cõmuniter numerantem eos numerare per numeros ea proportione minimos. Exemplum paratũ eſt: ſi triginta quatuor centeſimas ſecundas ad minimam nomenclaturam redigere velimus: ſtatim nanque ex dimidiatione decẽ & ſeptẽ quinquageſimæ primæ prodeunt: qui numeri ſunt impares & cõtra ſe primi. Poſtea ex prima numeratoris à denominatore ſubductione, triginta quatuor ex denominatore reſtabunt: deinde iterũ repetita ſubductio relinquit in denominatore, decem & ſeptem. ſimilitudinémque vtriuſque numeri tam numeratoris quàm denominatoris oſtendit. Is ergo numerus decem & ſeptem, qui maximus eſt, ambos cõmuniter numerans, eorum vtrunque diuidat. Quo fiet vt in numero partitionis ex numeratoris quidem ſectione vnum inueniatur: ex ſectione verò denominatoris, tria. Igitur vna tertia, minima nomenclatura eſt, ad quam perduci poſſint vel decem & ſeptem quinquageſimæ primæ, quæ ceſſante dimidiatione repertæ ſunt $\frac{17}{51}$ $\frac{1}{3}$; vel triginta quatuor centeſimæ ſecundæ, qui propoſitus eſt numerus, $\frac{34}{102}$ $\frac{1}{3}$. $\frac{17}{51}$ $\frac{51 \quad 17}{34}$ $\frac{34 \quad 17}{17}$

ALTERVM exemplum dari poteſt,ſi reliquæ ſint quatuordecim vigeſimæoctauæ, quas ad minimam nomenclaturam reducere velimus, $\frac{14}{28}$. horum quatuordecim ſecta per medium,relinquunt ſeptẽ. at viginti & octo dimidiata creãt quatuordecim $\frac{7}{14}$ ſic ſeptem quartædecimæ ex dimidiatione generantur. Vltrà propter imparẽ numerum ſeptenariũ dimidiatio non procedit:quærendus eſt ergo maximus numerus ambos communiter numerans,qui vtrunque tam numeratorem quàm denominatorem diuidendo deleat:is eſt ſeptem.ſemel enim ſeptem ſubducta numeratorem tollunt: quippe omnis numerus ſeipſum & numerare & ſubducere poteſt.rurſus ſeptem bis ſubtracta denominatorem etiam auferũt. numerus itaque partitionis vtriuſque peractæ palã indicat ſeptem quartasdecimas ad vnã ſecundam redigi. $\frac{7}{14}$ $\frac{1}{2}$ Quamobrem cum primũ reliquum eandẽ rationem habeat,quam pro ſua portione ſuum habet dimidium, ad vnam ſecundã recidit.quatuordecim igitur vigeſimæ octauæ ad vnam ſecundã, quæ minima earum nomenclatura eſt,rediguntur. $\frac{14}{28}$ $\frac{1}{2}$

MINIMVS numerus qui partes quaſcunque volumus, denominatas habeat,ſic eſt exquirendus. Poſtquam partes,quas in numero aliquo inueſtigare deſtinamus,ſuis notis ſunt deſcriptæ,numerus qui partes illas vniuerſas habeat, ex denominatorum in ſe multiplicatione facile procreatur,quemadmodum ſuperius obiter admonuimus.Cæterum minimus numerus,qui partes eas capiat, maiorem,vt eruatur,poſcit induſtriam.Is autem proportione minimà partes illas omnes habere comperietur,qui minimus numerus eſt,quem omnes illæ numerant. Itaque de primis quibuſque denominationibus primum expedire oportet,atque initio inueſtigare quis ſit minimus numerus à duabus primis denominationibus numeratus. Et quidem ſi hæ contra ſe primæ fuerint, vt nullus numerus eas numeret præter vnitatem:quia ſunt ſua proportione minimæ,quod ex alterius in alterum ductu generabitur, erit minimus numerus ab eis numeratus. Sin alius præter vnitatẽ numerus eas numeret, ſumantur partes ea proportione minimæ: quæ queadmodũ exquirantur,proximo capite edocuimus:quæ cũ ſunt inuentæ,ſubnotẽtur ſub partibus quarũ reſpectu ſunt minimæ.Deinde partes illæ maiores quarũ reſpectu alteræ ſunt minimæ,per numeros ſua proportione minimos,maior per minorem, aut minor per maiorẽ,multiplicatæ minimũ ab ipſis numeratum producẽt.Nã ſecundũ Euclidis ſcitũ, Quilibet duo numeri mini-

mos numeros ſuæ proportionis,maior minorem,aut minor maiorem,multiplicãtes,minimũ ab ipſis numeratũ producunt.Qui numerus minimus à duabus primis denominationibus numeratus; ad hunc modũ inuentus, cum tertia denominatione ſtatim cõferendus eſt , minimúſque numerus ab illis numeratus ad eundem modum exquirendus.Is poſtquam cognitus erit, cum quarta denominatione ſimiliter conferatur , minimúſque numerus ab illis numeratus itidem eruatur . Idémque indagãdi modus per omnes denominationes,ſiquæ vlteriores fuerint,ſeruetur. Minimus autẽ numerus ab illis numeratus,qui poſtremo conferentur, partes omnes propoſitas minima proportione capiet.Exẽpla demus, quæ rem magis illuſtrent : atque inueſtigemus minimum numerum; qui vnam ſecundam,vnam tertiam, vnam quartam, vnam quintam,vnã ſextam,atque vnam ſeptimam habeat. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$

IN PRIMIS QVE exquiramus, quis ſit minimus numerus, quem duæ primæ denominationes numerant.quæ quia ſunt contra ſe primæ,duo in tria ducantur:& ſex enaſcentur.qui numerus minimus eſt, quem duo & tria numerãt, quíque vnam ſecundam & vnam tertiam habeat.Iterũ ſex cum tertia denominatione,nempe cum quaternario conferamus : & quoniam numerus binarius ambos communiter numerat, bíſque in quatuor, & ter in ſex reperitur(quia tria & duo numeri ſunt ea proportione minimi)tria ſub ſex,& duo ſub quatuor ſubnotemus.Deinde vel ſenarium maiorem numerum per binarium , de duobus minima proportione ſubnotatis, minorem vel quaternarium minorem per ternarium, de duobus minima proportione ſubſcriptis , maiorem multiplicantes,duodecim procreabimus:qui numerus minimus eſt, quem ſex & quatuor numerant,quíque vnam ſecundam,vnam tertiam, & vnam quartam proferat . Rurſus duodecim cum quarta denominatione,videlicet cum quinario conferamus : qui numeri, quia contra ſe primi ſunt , atque ſua proportione minimi, quinque in duodecim ducamus, & ſexaginta creantur:qui minimus numerus eſt,quem quinque & duodecim numerant,quíque vnam ſecundã, vnam tertiam, vnam quartam ,& vnam quintam producat. Deinde ſexaginta cum ſenario numero , quæ denominatio proxima eſt,conferamus. & quoniam ſenarius & ſeipſum per vnitatem, & ſexaginta per denarium numerat : decem & vnum , qui numeri ſunt ea proportione minimi, ſubſignentur. Itaque ſiue ſexaginta maiorem numerum per vnum., qui numerus de duobus minima

proportione ſubnotatis minor eſt, ſiue ſex minorem numerū per decem numerum ex ſubſcriptis maiorem multiplicemus,ſexaginta iterum prodibunt: qui numerus minimus eſt à ſexaginta, & à ſex numeratus,& qui vnam ſecundam,vnam tertiam,vnam quartam, vnam quintam, atque vnam ſextam capiat. Demum ſexaginta cum ſeptem conferamus: qui numeri contra ſe primi, atque ſua proportione minimi comperiuntur: & ideo ſeptem in ſexaginta ducentes,quadringenta viginti procreabimus: qui numerus minimus eſt, quem ſexaginta & ſeptem numerant, quíque vnam ſecundam, vnam tertiam, vnam quartam, vnam quintam, vnam ſextam, & vnam ſeptimam proferre poteſt. Hac ratione numerus partes,quaſcunque volumus,denominatas complectens, exquiritur. Quinetiam ſi omnes hi denominatores in ſe multiplicentur, fient quinque millia & quadraginta: qui numerus itidem omnes eas denominationes habet. Cæterum numerus eas minima proportione capiens is eſt quem exquiſiuimus: nempe quadringenta viginti, qui numerus in illo duodecies continetur: quemadmodum ex illius ſectione per hunc facienda,cuiuis licet cernere. Alia itidem huius generis exempla, quæcunque occurrunt, ad hunc modum explicari poſſunt.

MODVS exquirendi pretiū quarūuis partium hic eſt attingendus. Nam cum ex integrorum diuiſionibus partes quæ ſuperſunt, tam crebræ ſupputantibus occurrant,vt nuſquam fermè non ſint obuiæ:ne earum æſtimatio longa mora quempiam torqueat inueſtigantem,pro quanta pecuniæ ſumma valeant,operæ pretium eſſe duximus viam demonſtrare, qua id quoque deprehendi poſſit. Ea autem eſt eiuſmódi, Si per partium numeratorem pretium totius integri, cuius ſunt partes, multiplicetur,& numerus ex multiplicatione procreatus per earundem partium denominatorem diuidatur,numerus partitionis pretium indicabit partium. Reliquum verò,ſiquod ex ea ſectione reſtabit, ſupra diuiſorē ſtantem linea interpoſita,notetur. Exemplū demus,vt magis quod dicim⁹, eluceat. Si ſingula vini dolia aureis viginti conſtiterunt, & duarū tertiarum pretium ſcire cupimus, viginti per partium numeratorem, qui duo continet, multiplicemus, vt ſint quadraginta: quæ deinde per denominatorem, qui tria continet, diuidamus: & numerus partitionis ſurget, tredecim aurei: & ſupereſt vna tertia vnius aurei:quæ cum pretij ſit particula, nobiſcum conſyderemus, qua pecunia viliori poſſit æſtimari,ſicut iam dicemus.

MINVTIARVM quarumlibet pecuniæ reliquarum æſtimatio deprehēditur ad hunc modum. Si pecuniæ ſumma, cuius pars eſt quoduis reliquum, in argenti libris per diuiſionem quæſita eſt: inueſtigemus, quot aureis, quot ſolidis, vel ſi libet, quot denarijs, aut quot nummis ſeſtertijs, aut quot ſemiſſibus, aut quot quadrātibus, aut quot ſextantibus argenti libra æſtimatur. Vel ſi pecunia prior in aureis per ſectionem inueſtigata fuerit, exquiramus pro quot denarijs, vel ſi libet, pro quot nummis ſeſtertijs, aut pro quot obolis, aut pro quot quadrantibus, aut ſiquod æs ſignatum vilius in vſu eſt, aureus integer valeat. Deinde æſtimationem totius illius partis, cuius pars ipſum reliquum eſt, per reliqui numeratorē multiplicemus: numerúmque procreatum per ipſius reliqui denominatorem diuidamus: & numerus partitionis æſtimationem reliqui monſtrabit. Iterúmque ſecundum reliquum, ſiquod prodibit, notetur: & vlterius, ſi ita libet, ad eundem modum procedatur. Exemplum repetamus, quod proximo capite dedimus: in quo pretium duarum tertiarum vnius dolij viginti aureis empti, tredecim aureos inuenimus, & reliqua erat vna tertia vnius aurei. Quæ vt ſciamus quid afferat, vnum aureum centum nummis æſtimemus, quorum numerus in vnum reliqui numeratorem ductus tantum centum creat: quæ per tria reliqui denominatorem diuiſa in numero partitionis educunt triginta tres nummos: & iterum ſupereſt vna tertia vnius nummi, quam æreis adhuc ſextantibus ad eundem modum æſtimare potes. Igitur pretium duarum tertiarum vnius dolij viginti aureis empti erit, Tredecim aurei, triginta tres nummi, & vna tertia vnius nummi. Itaque in arbitrio eſt computātis an pecuniæ æſtimationem ordine quodam exquirere velit, vt primum veſtiget quot argenti libras pecuniæ ſumma quæuis habeat, Deinde, ſiquid reliquum ſupereſt, quot id aureos faciat, Iterum, ſiquid remanet, quot id denarios creet, Tertio, ſiquid reſtat, quot id producat nummos, & ſic deinceps. Vel an ſtatim in primo reliquo ad viliſſimam pecuniam deſcendere malit, vt per eam reliquum æſtimet. Veruntamen vtrancunque viam elegerit, idem eſt indagandi modus.

AT SI ex integrorum ſectionibus partium occurrant particulæ, quarum pretium exquirere velimus, eas prius ad ſimplices integrorum partes reducamus. Deinde pretium ad eundem modum inueſtigemus, quemadmodum in ſimplicibus fragmentis iam diximus.

DE PARTIVM ADDITIONE.

PARTIVM additio, eſt plurium minutiarum ſeorſum propoſitarum in vnam ſummam collectio. Ea autem, quando partes eiuſdē ſunt denominationis, nullum habet negocium: ſola etenim numeratorū fit additio: & numerus procreatus ſupra breuem lineam notatur, ſub qua denominator apponitur. Exempli gratia. ſi quatuor ſeptimas, quinque ſeptimas, ſex ſeptimas vis addere, ſolis numeratoribus per additionem coniunctis, fiunt quindecim ſeptimæ. $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{15}{7}$

QVANDO verò partes diuerſos denominatores habent, ſi binæ minutiæ fuerint: poſtquam ad communem denominationem ſunt redactæ, priorum numerator per denominatorem poſteriorum, & numerator poſteriorum per priorum denominatorem, ad formam × literæ Græcæ (quæ ſpeciem crucis diui Andreæ refert) multiplicari debent: numerique inde prouenientes ambo ſimul addi: & conſurget numerator communis. Et ſi plures præterea minutiæ diuerſos habentes denominatores occurrunt, primis quibuſque (quemadmodum diximus) expeditis, proximæ ſequentes ſimiliter copulentur, donec omnes abſolutæ ſint eo modo quo ſuprà dictum eſt, cum de diſſimilium denominatorū reductione facienda præciperemus, vbi de communium numeratorum additione nonnihil etiam attigimus, ne quis id ibi deſyderaret, cum de cōmunium denominatorū inueſtigatione diceremus. Quamobrem illic explicata exempla, hic tantum ſpectanda ponemus, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ duæ tertiæ & tres quartæ denominatorem habent cōmunem duodecim, numeratorem verò cōmunem decem & ſeptē, ex additione quæ multiplicationē ad ſpeciem crucis factam ſequi debet $\frac{17}{12}$, quibus additæ $\frac{4}{5}$ quatuor quintæ procreabunt $\frac{133}{60}$ centum triginta tres ſexageſimas.

QVANDO minutiæ integris addendæ ſunt, ſi vnæ minutiæ erunt, notentur poſt ipſa integra. Veluti ſi $\frac{31}{37}$ addendæ ſint ad 12, ſic notis copulenrur 12 $\frac{31}{37}$. Quòd ſi plures ſint minutiæ, & plura integra, prius integra in vnam ſummam componantur: poſtea minutiæ ſeorſum eo modo ſimul additę, quo ſuprà dictum eſt, his adiungantur. Veluti ſi $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ addendæ eſſent ad 30 & 16, prius 30 & 16 coniungantur, & fient 46. tum deinde ipſæ minutiæ per additionem collectæ facient 2 $\frac{13}{60}$. quæ ad integrorum ſummā iungantur: & ſurgent 48 $\frac{13}{60}$.

AT SI minutiæ integris & minutijs addendæ ſunt, ſolæ minutiæ prius addantur eo modo quo dictum eſt. deinde quod ex earum ſumma ſurget, ipſis addatur integris: & ſiquæ minutiæ reſtabunt, poſt illa ſignẽtur, veluti ſi $\frac{5}{6}$ addẽdæ ſunt ad $7\frac{3}{8}$, prius copulentur $\frac{5}{6}$ cum $\frac{3}{8}$, quæ faciũt $1\frac{5}{24}$. ea iungantur ad 7, & vniuerſorum ſumma fiet $8\frac{5}{24}$. Hæc via multo minus habet laboris, quàm ſiquis integra in minutias his adiunctas frangat, vnúmque de his corpus faciens poſtea alteris ea minutijs copulet. id quod quidam faciũt, ad hunc modum, Integra per partium denominatorẽ multiplicant, & numero procreato partium numeratorem addunt: atque ita numerator communis enaſcitur. cui denominatorem nihil immutatum ſub linea ſubdunt. Veluti in exemplo dato 7 integra in vicinum denominatorem 8 ducunt: & numero 56 producto, numeratorem 3 addentes, $\frac{59}{8}$ faciunt. quas poſtea coniungunt cum $\frac{5}{6}$ eo modo quo dictum eſt. & res ad idem recidet.

QVANDO integra integris & minutijs addenda ſunt, prius integra coniungantur, poſtea adiungantur minutiæ. Veluti ſi 6 cum $3\frac{1}{5}$ copulanda ſint, prius 6 ad 3 addantur, & fient 9: quibus apponantur minutiæ, & vniuerſorum ſumma fiet $9\frac{1}{5}$. Itidem ſi plura integra cum compluribus integris & compluribus minutijs cõnectenda ſunt: prius omnes minutiæ in vnum corpus colligantur eo modo quo dictum eſt. poſtea integra quæ inde proueniunt ad alia integra iungantur: & ſumma quæſita ſurget.

AT SI integra & minutiæ integris & minutijs addi debent, prius in vnam ſummam integra colligantur. Poſtea minutiæ ſeorſum eo modo quo dictum eſt, copulatæ, his addantur. Veluti ſi $3\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{3}$ adiungi debent, prius 3 ad 6 addantur, & fient 9. poſtea $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſimul additæ faciunt $\frac{5}{6}$: quæ ad 9 adiungantur, vt omnium ſumma ſurgat $9\frac{5}{6}$. Eodem modo fiat ſi complura integra & complures minutiæ addendæ eſſent, vt prius integra colligantur, pòſt copulentur minutiæ, ex quibus ſiue integra, ſiue minutiæ, ſiue ambo ſurgunt, addantur ad priora.

VBICVNQVE autem minutiarũ minutiæ interueniunt: prius hæ ad ſimplices minutias redigantur: & tum demum in ſingulis ſecundum ea quæ ſuprà dicta ſunt, additio peragatur.

PARTIVM ſubductio, eſt ſummæ partium propoſitarum minoris à maiore ſubtractio: per quam relictus partiū illarum numerus apparet. Oportet autem ſemper vel minorem ſummā à maiore, vel æqualem ab æquali ſubtrahere. nam maior à minore ſubduci nequaquam poteſt. Propoſitis itaque binis minutijs, atque vtrarunque numeratore in alterarum denominatorem inuicē in ſpeciem crucis multiplicatis, illæ minutiæ maiores eſſe dicentur, quarum numerator in alterarum denominatorem ductus maiorem profert numerum.

QVAMOBREM ſi binæ minutiæ eundem denominatorem habent, quarum alteras ab alteris cupias ſubducere, minor alterarum numerator à numeratore alterarum maiore, ſi inæquales extiterint, ſubducatur, & reliquum ſupra denominatorem ponatur, linea interpoſita. Exēpli gratia. ſi duas tertias à ſeptem tertijs ſubtrahas, quinque tertiæ remanebunt. $\frac{2}{3}$ à $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{3}$ Vbi verò numeratores & denominatores reperientur æquales, facta ſubductione nihil erit reliquum.

QVANDO autem minutiæ diuerſos denominatores habent, prius denominatores inter ſe multiplicentur: & conſurgens numerus denominator communis erit. Deinde priorum minutiarū numerator in poſteriorum denominatorem, & numerator poſteriorum in denominatorem priorum, ad formā crucis ducatur. Quod vbi factū erit, ſi numeri procreati fuerint inæquales: minor à maiore ſubducatur, & reliquum ſupra communem denominatorem, linea interiecta, ponatur. Exemplum illud eſto. Siquis ſubtrahere velit à quatuor quintis duas tertias, denominatoribus in ſe ductis, prius producatur denominator cōmunis. poſtea quatuor numerator alterarum minutiarum in tria alterarū denominatorē ducta, creabunt duodecim, alterum numeratorem. Iterum duo, alterarum minutiarum numerator, in quinque denominatorem alterarum multiplicata, generabunt decem numeratorem alterum: quæ cum ſint pauciora quàm duodecim, ab illis ſubducantur: & duo relinquentur: quæ ſupra denominatorem communē prius procreatum locentur. ſic facta ſubductione, reliquæ erunt duæ quintædecimæ. $\frac{2}{3}$ à $\frac{4}{5}$ ſubducuntur, & relinquuntur $\frac{2}{15}$.

QVANDO minutiæ ſubducentur ab integris, ſuffecerit eas ab vno integro in minutias ſoluto, ſubducere: & quod tā de integris

quàm de minutijs reſtabit, totius ſubductionis erit reliquū. Veluti ſi $\frac{4}{7}$ ſubtrahendæ ſunt à 12: ſumamus 1 de 12, & reſtabunt 11, ab illo autem vno demptis $\frac{4}{7}$, relinquentur $\frac{3}{7}$: quæ copulatæ cū 11, reſtare faciūt 11 $\frac{3}{7}$: tantum ſupereſt ſi $\frac{4}{7}$ à 12 ſubducimus. Alij integra minutiarū more, ſupra lineam notant, cui vnitatem ſubijciūt, ad integra deſignāda. Deinde quaſi minutiæ à minutijs ſubducēdæ eſſent, poſt obliquā numeratorum in denominatores multiplicationem, minorē productū à maiore ſubducunt, & ſupra lineam notāt, cui denominatorē ſubdūt. ita 7 in 12 ducta creāt 84: & 4 in 1 ducta faciūt 4. quæ ſubducta ab 84, relinquunt $\frac{80}{7}$ Ea, ſi reducas ad integra, fient 11 $\frac{3}{7}$. ita res ad idem recidet. $\frac{4}{7} \times \frac{12}{1}$ $\frac{80}{7}$.

AT SI minutiæ ab integris & minutijs ſubducentur, fieri poteſt vt quæ ſubduci debent, minores ſint illis quæ integris adiunguntur. id quod ſi acciderit, tum ab illis minutijs ſubducantur, & integra intacta maneāt. quibus adiunctum id, quod reſtabit, totius ſubductionis erit reliquum. Veluti ſi $\frac{4}{9}$ ſubduci debent à 6 $\frac{9}{10}$, ipſis 6 integris manētibus, $\frac{4}{9}$ ſubducantur à $\frac{9}{10}$ eo modo quo dictum eſt, & reſtabunt $\frac{41}{90}$. quæ ſi 6 integris adiūgantur, relinquētur ex ea ſubductione 6 $\frac{41}{90}$. Quòd ſi minutiæ quæ ſubducendæ ſunt, maiores ſint his quæ integris adiunguntur: tunc de integris ſaltem vnū in minutias adiunctas ſoluatur, vt poſtquā vnū corpus ex his factū ſit: ab eo fiat ſubductio. Veluti ſi $\frac{4}{5}$ ab 8 $\frac{1}{2}$ ſubtrahi debēt, ſolue vnū de illis 8 in ſecūdas, & fient $\frac{3}{2}$. à quibus deme $\frac{4}{5}$, & reſtāt $\frac{7}{10}$. quæ ſi iūgas cū 7 relictis de 8: relinquentur 7 $\frac{7}{10}$: tantū reſtabit ſi $\frac{4}{5}$ ab 8 $\frac{1}{2}$ ſubduces. Hæc via multo breuior eſt, quàm ſiquis omnia integra in minutias adiūctas frangat, & poſtea ab eis alias minutias ſubducat. id quod quidā faciūt: qui ducētes 8 in 2, & 1 adiungētes, creant $\frac{17}{2}$. à quibus demūt $\frac{4}{5}$ eo modo quo ſuprà dictū eſt, & reſtant 7 $\frac{7}{10}$. ſic res ad idem recidet.

QVANDO integra ab integris & minutijs ſubduci debent, demantur integra ab integris, & quod ſupererit, totius ſubductionis erit reliquum. Veluti ſi 9 à 13 $\frac{3}{5}$ ſubtrahenda ſunt, eximantur 9 à 13, & reſtant 4 vnà cum minutijs $\frac{3}{5}$. ita ſi 9 à 13 ſubducas, id totum quod relinquitur, eſt 4 $\frac{3}{5}$.

VERVM ſi integra & minutiæ ab integris & minutijs ſubduci debēt, tūc vtraque integra ſeorſum in minutias adiūctas ſoluātur, vt vna minutiarū facies vtrinque cōſiſtat. poſteáque ſubductio eodem modo fiat, ſicuti fieri ſolet quādo minutiæ à minutijs ſubducuntur: qua peracta, denuo colligātur integra ex eo quod reſtabit.

dato, cum duo in tria ducuntur, fiunt ſex: quæ ſi nihil præterea fi eret, viderentur integra. Cæterũ quia non duo integra per tria, ſed duæ tertiæ vnius integri per tres eius quartas multiplicãdæ ſunt: ſimiliter partium denominatores in ſe ducũtur, vt partium diuiſione, quæ per denominatoris multiplicationem fit, (quanto enim magis denominator creſcit, tanto magis partes comminuuntur) nimia numeratoris augmentatio tantum corrigatur, quantũ plus iuſto creuerat, atque ea ratione ad æqualitatẽ redigatur. Ita poſtquam etiam denominatores in ſe ducti creant duodecim, liquet ſex duodecimas eſſe, quæ alioqui ſex integra videri poſſent.

PORRÒ ſi per minutias velis integra multiplicare, aut minutias per integra: ipſum integrorum numerum per minutiarum numeratorem multiplica, & producetur omnium numerator: cui minutiarũ denominator nihil immutatus ſub linea ſupponatur. Veluti ſi 2 integra per $\frac{3}{4}$, aut $\frac{3}{4}$ per 2 integra multiplicentur, procreantur $\frac{6}{4}$, quæ faciunt $1\frac{1}{2}$. Alij integra ad exemplum minutiarum ita ſcribũt, vt numerus integrorum ſupra breuem lineam notetur, & ſub ea reponatur vnitatis nota, quæ integra illa eſſe ſignificet. iuxta quæ ſic ſcripta, quaſi minutiæ eſſent, veras apponũt minutias, quas in ea ducunt. Deinde numeratorem integrorum per minutiarum numeratorem, harúmque denominatorẽ per denominatorem illorum multiplicant: qui modus & expeditus eſt, & res ad idem recidit. nam cum ipſa vnitas integra deſignans alios numeros non multiplicet, denominator ſemper inuariatus manet. ita $\frac{2}{1}$ ducta in $\frac{3}{4}$, faciunt $\frac{6}{4}$.

SIC obiter expedita eſt partium duplicatio: quam ſpeciem quidam ſeparatim tractant.

SI AVTEM per minutias voles integra, alijs minutijs adiuncta, multiplicare, vel è conuerſo minutias per integra minutijs adiuncta: reduc prius integra in minutias ſibi adiunctas, ipſa integra multiplicando in illarum denominatorem, numeróque procreato illarum numeratorẽ addendo. cui numeratori ſic accumulato, minutiarum illarum adiunctarum denominator ſub linea ſubdatur. Deinde ipſæ minutiæ iuxta alteras ſcribantur, numeratórque per numeratorem. & denominator per denominatorem multiplicetur. Puta ſi duo integra cũ duabus ſeptimis per duas quartas multiplicanda fuerint, duo in ſeptem ducta creabunt quatuordecim: quibus duo, quæ ſunt in numeratore addita, producent ſexdecim. is erit numerator, cui denominator ſeptẽ capiens ſub linea iungi

debet. Deinde numerator in alterarum numeratorē ductus creabit triginta duo: denominatoreſque itidem in ſe ducti, producēt viginti octo. ſic 2 integra & $\frac{2}{7}$ reducta creant $\frac{16}{7}$. quæ per $\frac{2}{4}$ multiplicata, componunt $\frac{32}{28}$. Ea vnum integrum faciunt, & $\frac{1}{7}$.

QVANDO integra in integra minutijs adiuncta ducenda ſunt: prius integra minutijs adiuncta in ſociarum minutiarum faciem reducito, ipſa integra in illarum denominationem ducens, numeróque producto numeratorem addens. cui numeratori ſic coaceruato, denominator ſub linea ſubdatur. iuxta quas minutias integra minutiarum more, ſupra lineam notentur, ſubiecta his vnitate. Deinde numeratores in numeratores ducantur, itémque denominatores in denominatores, ſicuti fit in minutijs. Veluti ſi 9 in 3 $\frac{4}{5}$ ducēda ſint, 3 in 5 ducta facient 15. quibus addita 4, creāt $\frac{19}{5}$. poſtea 9 in 19 ducta producent 171: quæ ſupra lineā ponantur. Itē ſemel 5 faciūt 5, quæ ſub linea locentur. Ita ex hac multiplicatione fient $\frac{171}{5}$. quæ ſi ad integra libet reducere, creabunt 34 $\frac{1}{5}$.

AT SI integra & minutiæ in integra & minutias duci debent, veluti 3 $\frac{4}{9}$ in 5 $\frac{3}{8}$, vtraque integra prius in minutias ſibi adiūctas redigantur, & poſtea minutiarum more multiplicatio fiat. Itaque in prioribus illis 3 in 9 ducta creant 27. quibus numerator 4 adiūctus producit $\frac{31}{9}$. Similiter in alteris fiat. 5 in 8 ducta faciunt 40. quibus numerator 3 additus, educit $\frac{43}{8}$. Iā verò $\frac{31}{9}$ ductæ in $\frac{43}{8}$ producunt $\frac{1333}{72}$. quæ ad integra reductæ faciunt 18 $\frac{37}{72}$.

VBICVNQVE autem minutiarū minutiæ interueniunt: prius hæ ad ſimplices minutias redigendæ ſunt, & poſtea in ſingulis, ſecundum ea quæ ſuprà dicta ſunt, multiplicatio peragenda.

DE MINVTIARVM PARTITIONE.

PARTIVM diuiſio, eſt duorum fragmentorum, alterius alterum oblique ſecantis, per multiplicationem in vnū coitio, per quam tertium enaſcitur fragmentum, ex vtriuſque illorum æquali complexu generatum. In omni autem partiū diuiſione fragmentum partibus diuiſoris fungens à parte ſiniſtra poni debet, fragmentum verò diuidendum à dextra. quemadmodum fit in integris, vt diuiſor ſiniſtram occupet. Deinde fragmēti diuidendi numerator in diuiſoris denominatorē multiplicetur, & enaſcetur ſectionis numerator. Poſtea denominator diuidendi fragmenti in diuiſoris numeratorem ducatur: & partitionis denominator proueniet. qui ſub numeratore prius procreato, linea in-

teriecta, ſupponi debet. Ita ad hunc modum numeratorum in denominatores, & denominatorũ in numeratores multiplicatio obli que in formam crucis diui Andreæ facta, fragmentum procreabit diuiſoris & diuidendi vim pariter complectens. Exempli gratia. Si per tres ſextas diuidere duas tertias voles, multiplica duo in ſex: & fiunt duodecim, numerator operis. Deinde tria in tria ducantur & procreabuntur nouem, ſectionis denominator. Sic per $\frac{3}{6}$ diuiſæ $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12}{9}$. quæ, ſi earum numerator per denominatorem ſecetur, integrum vnum & tertiã vnius integri partem conſtituũt.

SVNT qui iubent in minutijs diuidendis, diuiſorem à dextra poni, quaſi id magni referat. qui cur id fieri ſic velint, nihil video, quando illi ipſi præcipiunt fragmenti diuidendi numeratorem in diuiſoris denominatorem, contráque diuidendi denominatorem in numeratorem diuiſoris duci. Quod præceptum ſiquis ſeruet, nihil omnino refert ab vtra parte diuiſor ſteterit: id quod res ipſa ante oculos poſita palàm indicabit, ſi in medio fragmentum diuidendum, atque vtrinque idem fragmentum ſecans ſtatuatur, ad hunc modum. $\frac{3}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{6}$ Nam fragmenti medij diuidendi numerator in diuiſoris denominatorem, vel à ſiniſtra, vel à dextra ductus, eundem creat numerum, ſimilitérque diuidendi denominator in numeratorem, vel ſiniſtrum, vel dextrum multiplicatus idẽ faciet. Quamobrem cum in integris diuiſor ſiniſtram teneat: non temere aliud in partibus ſtatuemus, præſertim cum in explicandis difficillimis quibuſque quæſtionibus, in quibus minutiæ interueniunt, hæ, quæ diuiſoris funguntur partibus, ſuapte natura ſiniſtram teneant. id quod in ſequenti libro paſſim cuiuis licebit cernere. Quas minutias, quando ad diuiſionem ventum erit, ſi de ſuo loco in dextram transferes, laborem geminabis.

SI QVAERIS cur ita in minutiarum partitione multiplicatio in formam obliquæ crucis fiat, ratio illa eſt: quòd minutiarum exilitas fit per denominatoris multiplicationem. quanto enim magis ille creſcit, tanto magis hæ comminuuntur, & numero plures fiunt. At è conuerſo numeratoris incrementum vel integra progignit: vel partes multo propiores integris. Itaque cũ minutiarũ inter ſe multiplicatio, ex numeratoris directo in alterũ numeratorẽ ductu, denominatoríſque itidem in alterarum denominatorẽ conſtet, quemadmodum proximo capite edocuimus: minutiarum verò diuiſio, quæ ſuapte natura multiplicationi cõtraria eſt, per multiplicationem fieri etiam ipſa debeat, vt tertiũ his mutua ſectione

coeuntibus fragmentum enaſcatur, quoniam altera illa multiplicatio conficitur directe. hæc,quæ partes ſecat, neceſſe eſt oblique fiat, vt alterarum numerator in alterarum denominatorem,denominatórque alterarum in alterarum numeratorem ducatur.alioqui ſectio nimia redderetur,nec ad æqualitatem res poſſet perduci.Veluti in exemplo iam dato,quando per $\frac{3}{6}$ diuidere $\frac{2}{3}$ volumus:multiplicantes tria diuidendi denominatorem per tria diuiſoris numeratorem,ſi nihil præterea faceremus,videremur per tria integra partes illas ſecare:atque ita diuidendo, nimium excederemus.Sed quoniam illa tria per quæ diuiſimus,non erant tria integra,ſed erant tres ſextæ, propterea diuidendi numeratorem in ſex diuiſoris denominatorem ducentes, corrigimus exceſſum illum, atque ita partitionem ad æqualitatem reducimus.tãtum enim diuidendi numeratorem ſupplemus,quantum plus iuſto denominatorem eius auximus,partes minuendo.

EN TIBI expeditam partium diuiſionem.quã vt plenius pernoſcas,illud obſeruare oportet,tres earũ ſecandi eſſe ſpecies. Vna eſt,quando partes maiores à minoribus ſecantur. in qua ſpecie naſcuntur minutiæ,quæ plus quàm vnum integrum creant. Exemplum.ſi per $\frac{1}{3}$ ſeces $\frac{1}{2}$, oriuntur $\frac{3}{2}$, quæ vnum integrum & dimidium componunt.Altera,quando æquales partes diuidunt æquales,ex qua vnum creatur integrum.Exẽpli cauſa. ſi per $\frac{1}{2}$ diuidas $\frac{1}{2}$,fiunt ex ea ſectione $\frac{2}{2}$: quæ vnum integrũ faciunt.Tertia eſt, vbi partes minores diuiduntur à maioribus:id quod in minutijs ſæpenumero euenit. ſic enim hæ coire poſſunt. In hac partes procreatæ minus reddunt,quàm vnum integrum. Exẽpli gratia.ſi per $\frac{1}{2}$,ſeces $\frac{1}{3}$: prodeunt $\frac{2}{3}$ quæ tertia parte minus, quàm vnũ integrũ edunt.Et vt ſcias quẽ ſenſum afferat minutiarum partitio: primo numerũ aliquẽ inueſtigare oportet,qui vtraſque minutias,tam quæ diuidunt,quàm quæ diuidendæ ſunt, contineat.id quod facile fit,ſi vtrarũque denominatores inter ſe multiplices, deinde in numero illo procreato duos numeros minores exquiras:alterum,qui partes diuidendas:alterum, qui partes diuiſores referat. Ita deprehendes nihil omnino intereſſe vtrum alterum illorũ numerorum per alterum diuidas,an partes alteras per alteras.Exemplum in prima ſecandi ſpecie,vbi per $\frac{1}{3}$ ſecamus $\frac{1}{2}$.ſi numerum quærimus, qui $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$ capiat,tria in duo ducta, ſex nobis creant. qui numerus vtraſque minutias cõplectitur. Poſtea in ſex,prius numerum inueſtigemus qui vnam eorum tertiam expri-

mat. is erit duo. deinde iterum in ſex alterum numerum inquiramus, qui creet vnam eorum ſecundam: & tria eſſe comperiemus. Quibus numeris inuentis, nihil referre deprehendemus, vtrum per $\frac{1}{3}$ ſecemus $\frac{1}{2}$, an tria per duo. Nam vtrobique res ad idem recidet: quippe ex partium ſectione proueniunt tres ſecundæ, quæ vnũ integrũ & dimidiũ faciunt: nam numeratoris per denominatorem partitio vnum in numero partitionis producit, vltra quod vna ſecunda ſupereſt. id quod itidem eueniet ſi tria per duo ſeces. Alterum exemplum in ſecũda ſecandi ſpecie, Si per $\frac{1}{2}$ diuidas $\frac{2}{4}$: inde prodeunt $\frac{4}{4}$, quæ vnum integrum creāt. Idem ſurget ſi quatuor diuidas per quatuor: quippe in octonario numero ex denominatorum in ſe ductu procreato 4 vnam ſecundam, & 4 duas quartas faciunt. At in tertia ſecandi ſpecie, quãdo maiores partes, diuiſoris funguntur partibus, quemadmodũ tunc in integris ſectio fieri nequit, niſi minor numerus vel in ſpecies ſub ſe contentas multiplicetur, vel in minutias ſoluatur, ſicuti mox dicemus: ita dum minutiæ coeuntes ſic ſecantur, huiuſmodi partitio nil niſi minutias parit, quippe quæ vnum integrum nequeunt æquare. quia quot partibus numerator à denominatore ſuperatur, totidẽ deſunt ad integrum componẽdum. Veluti ſi per $\frac{1}{2}$ ſeces $\frac{1}{3}$: prodeunt $\frac{2}{3}$. Quod perinde valet ac ſi duo per tria diuidere moliaris. nam in numero ſenario vtraſque complectente minutias, tria vnam ſecundam, duo vnam tertiam faciunt. Quæ ſectio in integris fieri nequaquã poteſt, vt vterque numerus integer maneat, id quod mox explicabimus. Quamobrem quando partes quælibet per alteras quaſuis partes diuidendæ proponuntur: hoc ſignificatur, vt partes illæ alicuius numeri propoſitæ diuidãtur per alteras eiuſdem numeri partes propoſitas.

PRAETEREA cum in integris multiplicatio ſemper augeat, partitióque diminuat: in minutijs contrà euenit, vt eæ multiplicãdo decreſcant, & augeãtur partiendo. Nam ſi per vnam tertiã vna ſecunda multiplicetur: procreatur vna ſexta, quæ longe minor eſt quàm vel vna ſecunda, vel vna tertia. At è conuerſo, ſi per vnã tertiam vna ſecunda diuidatur: fiunt tres ſecundæ: quæ vnum integrum & dimidium cõponunt, quod longe plus eſt quàm vel vna tertia, vel vna ſecunda. Veruntamen qui minutiarum naturam eã eſſe meminerit, vt quanto magis in numero denominator creſcit, tanto magis quantitate partes diminuantur, id quod antè ſæpius admonuimus: ſtatim mirari deſinet cur minutiæ multiplicãdo de-

creſcant, cum in his numeri incrementum diminutionem afferat quantitatis, & denominator pro ratione magis quàm numerator augeatur. Maius mirum prima facie videri poteſt, quomodo partes diuidendo creſcant: ſed nec id quidem quempiam turbare debet, qui partium diuiſionem ab integrorũ lõge diuerſam eſſe pernouit. Etenim illa fit per ſubductionem diuiſoris à numero diuidendo toties repetitam, quoties id fieri poteſt. Hæc autẽ per duorum fragmentorum obliquam in vnum coitionem, per quam tertium exoritur fragmentum ex æquali illorum complexu productum. Quare quoniã multiplicationis natura eſt vt partes edat minores: partitionis quæ ei contraria eſt, eſſe debet, vt partes inſtauret, plenioréſque eas reddat. Cui rei nõ abſimile quiddam nõnũquã in integris videre licet, ſiquis minutiores nummos ad librarũ aureorúmve ſummã cupiat redigere. id quod fit per ſectionẽ, ſi per illum nummorum numerum, quo libra vna aut aureus vnus æſtimatur, vniuerſus nummorum numerus diuidatur. Itaque quando minutiæ per minutias ſecantur, omnia maiora fiunt, quemadmodum aurei atque libræ congeruntur ex minutioribus nummis. Quocirca partium diuiſio nihil aliud eſt, quàm inueſtigatio quædam quot & quæ partes ex duabus fragmentis ad tertij fragmenti procreationem pariter per ſectionem coeuntibus oriantur.

SIQVAE verò minutiæ per integra fuerint diuidendæ: ab earum ſiniſtra numerus integrorum ſupra lineam ſcribatur, veluti minutiarum numerator quidam, ſub quo, linea interiecta, notetur vnitas: quæ, quaſi quidam denominator, integra deſignet. túmque multiplicatione in formam crucis facta, ſic fiat diuiſio quemadmodum in alijs minutijs. Nam ſi per $\frac{2}{1}$ diuidantur $\frac{3}{4}$: poſtquam in ſpeciem crucis multiplicatio fiet, orientur $\frac{3}{8}$. Alio modo id fieri poteſt, & res ad idem recidet: vt denominatore manẽte intacto, numerator minutiarum per numerum integrorum in partes æquales, ſi fieri poteſt, diuidatur. Veluti ſi per 2 integra $\frac{6}{8}$ ſecentur, fient $\frac{3}{8}$. Alioqui ſi numerator per integrorum numerum in partes æquales ſecari non poſſit, numerus integrorum in denominatorem diuidendi fragmenti multiplicetur, & res erit confecta: ſicuti ſi per 2 integra $\frac{3}{4}$ ſecentur, prouenient $\frac{3}{8}$.

SIC OBITER expedita eſt partium dimidiatio, quam ſpeciem curioſi quidam ſeparatim tractant, cum longe ſit facilior quàm ſi quis eas per tria, quatuor, aut quenuis alium maiorem numerum ſecare velit.

AT SI minutiæ per integra & minutias ſecandæ proponuntur: prius integra in minutias ſibi adiunctas redigantur, vt vna de his minutiarũ facies appareat. quæ, quia diuiſoris partibus fungentur, ſiniſtram occupabunt: aliæ verò minutiæ, quæ ſectionem pati debent, dextram. deinde multiplicatione in formam crucis facta, minutiarum more, diuiſio peragatur. Veluti ſi per 2 $\frac{1}{2}$ partiri $\frac{3}{4}$ voles: prius adiunctarum minutiarum denominator 2 in 2 ducatur, & fient 4. quibus additus numerator 1, educit $\frac{5}{2}$: per quas ſi ſeces $\frac{3}{4}$, ex ea partitione prouenient $\frac{6}{20}$.

QVÒD SI integra per minutias diuidi debent, integra quidem minutiarum more, ſupra lineam, cui ſubdatur vnitas, à dextra locentur: minutiæ autem à ſiniſtra. Cætera verò quæ de multiplicatione in formam crucis facienda iam diximus: nihil immutentur. Exempli gratia. ſi per $\frac{2}{3}$ ſecare vis $\frac{4}{1}$, enaſcentur $\frac{12}{2}$.

PORRO ſi integra per integra & minutias diuidenda ſunt, poſtquam integra, quæ minutias adiunctas habent, in earum formam redacta erunt, à ſiniſtra locentur, quod diuiſoris fungantur partibus: cætera verò expediantur ſicuti proxime diximus, quãdo integra per minutias ſecantur. Veluti ſi per 2 $\frac{2}{3}$ ſecandæ ſunt $\frac{4}{1}$, minutiarum adiunctarum denominator 3 ducatur in 2, & fient 6 quibus numerator 2 additus creat $\frac{8}{3}$. per eas autem ſi diuidas $\frac{4}{1}$, inde prouenient $\frac{12}{8}$, quæ faciunt 1 $\frac{1}{2}$.

AT SI integra & minutiæ per minutias ſecandæ ſunt: prius integra in minutias ſibi adiunctas redigantur, vt vna de his minutiarũ facies fiat. deinde à dextra poſitæ, per alteras minutias fragmẽtorũ more ſecentur. Veluti ſi per $\frac{5}{6}$ partiri 5 $\frac{3}{4}$ voles: 5 in 4 ducantur, & 20 prodibunt. quibus numeratorem 3 adde, & ſurgent $\frac{23}{4}$. Poſtea multiplica 4 denominatorem diuidendi fragmenti in 5 numeratorem diuiſoris, & producẽtur 20. Deinde numerator diuidendi 23 ducatur in denominatorem diuiſoris 6, & ſurgent 138. quæ ſi per 20 ſecta ad integra redigantur, proferent 6 $\frac{9}{10}$.

AD EVNDEM modum fiat ſi integra & minutiæ per integra ſecandæ ſunt. id quod quando acciderit, ipſa integra à ſiniſtra locata minutiarum ſpeciem induant, vti ſuprà dictum eſt.

QVANDO verò integra & minutiæ per integra & minutias diuidi debent, prius vtraque integra in minutias ſibi adiunctas ſeorſum redigantur, vt omnia minutiarum ſpeciem vtrinque referant. Deinde minutiæ quæ diuidendæ ſunt, à dextra locatæ, per alteras, fragmentorum more ſecẽtur. Veluti ſi per 3 $\frac{2}{5}$ partiri 6 $\frac{1}{7}$ cupis: 3

in 9 multiplicata,& producto numerator additus,facient $\frac{29}{9}$. Itē 6 in 7 ducta,productóque numerator adiunctus proferent $\frac{43}{7}$. Poſtea ſi per $\frac{29}{9}$ ſecētur $\frac{43}{7}$, ex ea partitione $\frac{387}{203}$ prodibunt. quæ ad integra reductæ faciunt $1\frac{184}{203}$.

VBICVNQVE autē minutiarū minutiæ interueniunt, prius hæ ad ſimplices minutias redigendæ ſunt, & poſtea in ſingulis, ſecundum ea quæ ſuprà dicta ſunt, diuiſio peragenda.

SI CAPERE experimentum libet an partitio recte facta ſit, ſectionis numerum in diuiſorem multiplica,& numerus diuidendus producetur. nam multiplicatio diuiſionem, & multiplicationem diuiſio probat in minutijs,quemadmodū fit in integris. Igitur quando per $\frac{1}{3}$ ſecantes $\frac{1}{2}$ educimus $\frac{3}{2}$, quæ faciunt $1\frac{1}{2}$: recte diuiſum eſſe probabimus, ſi $\frac{3}{2}$ in diuiſorem $\frac{1}{3}$ ducemus. ita $\frac{3}{6}$ producentur, quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciūt $\frac{1}{2}$. quod fragmentum diuidendum erat.

IN MINVTIIS operæpretium illud admonere putauimus; in quo multum exercitatos labi ſæpenumero vidimus, Quandocunque minutiæ quæ diuiſoris funguntur partibus, & quæ ſunt diuidendæ, eundem denominatorem habent, qui in vtriſque ſuo numeratore minor reperitur, maiórque exiſtit earum numerator quæ ſecandæ ſunt, quàm quæ ſecare debent: quoniam tunc in vtriſque, minutiæ totidem integra repræſentant quoties vtriuſque numerator denominatorem ſuum continet, partitio nequaquam oblique in formam crucis fiat, ſicuti fit in minutijs, ſed denominatoribus manentibus intactis, maior diuidendi numerator per diuiſoris numeratorem, qui minor eſt, integrorum more ſecetur. Alioqui ſi ſupputator illas ſicut minutias diuideret incautus, cum integra deſinent, & minor numerator maiorē partiri poſſit, in labyrinthum inextricabilem ignorans ſeſe immergeret. Exemplis rem illuſtremus. Eſto per $\frac{5}{3}$ ſecandæ eſſent $\frac{7}{3}$, denominatoribus vtriuſque nihil immutatis, ſeptem per 5 diuiſa educent vnum integrum & duas quintas. Aut ſi per $\frac{8}{6}$ partiri cupias $\frac{10}{6}$, per octo ſecans decem, vnum integrum procreabis: & ſupererunt $\frac{2}{8}$, quæ reddunt $\frac{1}{4}$.

Et quanuis in his exemplis nihil referre videatur vtro ea modo ſecentur, cum etiam ſi minutiarum more fieret partitio, nihilominus poſt reductionē minutiarū ad integra res ad idē recideret: tamē præterquam quòd via iā monſtrata illas reducendi vitat ambages, multæ ſupputationes occurrent in quibus error immenſus

orietur,ſi ritu partium ea diuidas. Et præſertim vbi ex diuerſis integris, & varijs minutijs in vnum additis, vnus omnium diuiſor colligitur, qui multa & varia ſecare debeat. Id quod in explicandis numerorum nodis, in ſequenti libro manifeſtum per exempla faciemus.

IN INTEGRIS numeris maior non diuidit minorem: cum in minore maior non cōtineatur:vti ſuperiori libro,de partitione præcipientes, admonuimus. Cæterum maior numerus minorem frangere in minutias poteſt. Et vt ſcias quonam modo ea ſectio fiat,quótque & quales partes faciat:illud obſerua,vt minorem numerum diuidendum ſupra breuem lineam ductam,numeratorem ſtatuas: maiorem verò qui diuiſor eſt,denominatorem lineæ ſubijcias.ſic tot enaſcentur partes,quot diuidēdus,qui numerator eſt, vnitates capit.tales autem erunt,quales denominator, qui diuiſor eſt,demonſtrabit. Quæ continuo ad minimam ſui nomenclaturam redactæ manifeſtabunt quot & quales partes prodeant,quando maior numerus in minutias diuidit minorē. Exemplum, Si per 30 ſecare 15 velimus, fiunt $\frac{15}{30}$.quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{2}$. Itidem ſi per 40 partiri cupiamus 15, ſectio facit $\frac{15}{40}$,quæ ſunt $\frac{3}{8}$. Similiter ſi per 13 ſecare velimus 7, prodeunt $\frac{7}{13}$. Minor numerus ſupra lineā numerator efficitur, quòd in minutijs is locus ſit numeri diuidendi. maior verò numerus ſub linea denominator fit: quòd eum locum in minutijs diuiſor obtineat. Et quemadmodū ſi numerator maior eſſet,denominator minor eum ſecans proferret integra:ſic è conuerſo,quando denominator numeratore maior eſt,enaſcuntur minutiæ: quibus tantum deeſt ad integrum componendum,quanto numerator denominatore eſt minor. Ita numerus minor diuidi per maiorē duobus modis poteſt. vel quando res à minore numero numeratæ ducuntur in ſpecies ſub ſe contentas:vt numerus productus maioris ſectionem ferat. veluti ſi vnus aureus inter quatuor viros diuidendus, multiplicetur in minutiorē pecuniam,vt in quatuor partes diſtribui poſſit. vel quando numerus maior minorē in minutias ſecat: id quod fieri poteſt eo modo quo iam diximus. Hæc quanquam attinent ad ſectionem integrorum, quia tamen huiuſmodi partitio producit minutias,de quibus ibi præpoſtere fuiſſet dicendum, in hunc locum potius releganda fuerunt.

DE RADICVM INVESTIGATIONE IN MINVTIIS.

QVADRATI & cubi lateris inueſtigatio eodem modo fit in minutijs quo in integris fieri ſolet, niſi quòd geminandus eſt labor, cum tam in numeratore quàm in denominatore radix ſit quærenda. Latus autem in numeratore inuentum numeratoris erit radix. quod verò ex denominatore eruetur, denominatoris radix habebitur. inter quæ, linea media ſecanda eſt. Exẽplum de latere minutiarũ quadrato. Si de $\frac{25}{16}$ radicem cupis eruere, numeratoris radicem inuenies 5, denominatoris 4. Sic linea diſtinguente, fiunt $\frac{5}{4}$. Similiter de $\frac{46}{94}$ radix quadrata capit $\frac{6}{9}$, & reliquæ ſuperſunt $\frac{10}{13}$. Radix verò cubica earundem minutiarum habet $\frac{3}{4}$, & reſtant $\frac{19}{30}$.

DE RADICIBVS PROPIVS INVENIENDIS IN NVmeris neque quadratis neque cubis.

VBI IN numero, qui neque quadratus eſt, neque cubus, radix eſt inuenta, ſemper aliquid erit reliquum, ſiue in prima inueſtigatione id eueniat, ſiue in vlteriore: de qua iam dicemus. Nam ſi nihil reſtaret, is numerus, quadratus, aut cubus eſſet. Nonnunquam autem in amplo numero reliquum ipſum ingens erit. Prima nanque inueſtigatio radicem deprehendit maximi numeri quadrati, aut cubi in his contenti: inter quem & numerum illum, qui neque quadratus, neque cubus proponitur, ipſum reliquum differentiam manifeſtat. Quocirca in eiuſmodi numeris veram radicem aſſequi nunquam licet: tametſi propius multo, quàm in prima inueſtigatione factum eſt, accedi poteſt: vt ſcias quot partes cuiuſuis denominationis ſuperſint. Id quod in quadratis fiet ad hunc modum.

POST primam in integris radicis exquiſitionem, in qua reliquum ſupereſt: numerum illum non quadratum, cuius in integris radix inuenta eſt, per denominatorem cuiuſcunque partis, quam optas, multiplica. Deinde per eundẽ denominatorem iterum multiplica numerum productum. Quod cum factum erit, radicem numeri per ſecundam multiplicationem producti, exquire. Hæc nanque radix ſecunda cunctas illius denominationis partes in numeri primo propoſiti radice contentas demonſtrabit. Atque ideo ſi per partium denominatorem radicem illam ſecundam ſeces: nu-

merus ſectionis proferet primæ radicis integra: & præterea etiam partes aliquot illius denominationis. Cæterum aliquot minutiæ ſemper reſtabunt, quæ minus quàm vnā partem faciant: vt ad integrum formandum partes illæ nunquam deduci queant.

VERBI gratia, ſi ſcire libet quæ ſit radix numeri octonarij: hãc eſſe 2 deprehẽdes, & quatuor erunt reliqua. Iam ſi ſcire velis quot quartæ vnius integri ſuperſint in radice: Primum 8 per quatuor multiplica, & prodeunt triginta duo. Iterum triginta duo in quatuor ducito, & producentur 128. Huius ſecundo producti radicem perſcrutans comperies eam 11. totidem nãque quartæ ſunt in octonarij numeri radice, hoc eſt, duo integra, & tres quartæ, præter ſeptem in minutijs reliqua, quæ quartam explere nequeunt. Itaque vltra primam inueſtigationem, quæ 2 integra in radice protulit, ſecunda tres præterea quartas eruens propius acceſſit.

QVÒD SI etiamnum partium particulas inueſtigare pergens ſcire velis quot quartæ vnius partis quartæ, vltra duo integra & tres quartas ſuperſint: ad eundem modum, ſicut de integrorũ partibus exquirendis iam dictum eſt, numerum, cuius radicem ſecundo indagaſti, ſemel in denominatorem particulæ, & iterum in productum ducere debes: atque in numero ſecundo producto radicẽ inueſtigare. quæ poſtquam inuenta erit, cunctas illius denominationis partium particulas in numeri primo propoſiti radice contentas demonſtrabit. Illam autem radicem ſi per denominatorem particularum ſeces, numerus ſectionis partes integrorum demonſtrabit: & id quod erit reliquum, partium particulas.

VERBI gratia, 128, cuius numeri in ſuperiori exemplo ſecundo producti radicẽ inueſtigauimus, per quatuor multiplicemus: inde naſcẽtur 512. Poſtea iterum ducamus quatuor in 512: ita producentur 2048. huius numeri radicem quærentes deprehendemus eam eſſe 45: & ſuperſunt 23. Igitur 45 quartæ vnius partis quartæ in octonarij radice erunt: quas ſi diuidamus per quatuor numeros partitionis, mõſtrabit 11, & vnum erit reliquum. Qua ratione comperiemus in octonarij radice vndecim partes quartas, nempe duo integra & tres quartas, atque inſuper vnam quartam vnius partis quartæ cõtineri. Quòd ſi cui eſt animus amplius progredi: poterit ad eundem modum etiam particularum particulas vlteriores perſcrutari.

IN CVBIS quoque numeris ad eundem omnino modum omnia fiant. niſi quòd numerũ illum non cubum, cuius radix in

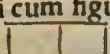
integris inuenta eſt,non ſolum per denominatorem partis,quamcunque voles,multiplicare oportet, & iterum in productum:ſed (vt ratio cuborum poſtulat) tertio denominatorem illum in numerum ex ſecunda multiplicatione productum ducere debemus. Quo fiet vt numeri tertio producti radix inueſtigata cũctas illius denominationis partes in primi cubi radice cõtentas manifeſtet. Itidem etiam progredi licet ad partium particulas in his inueſtigandas.

ALIO MODO per compendium id fieri poterit,ad hunc modum,vt denominatorem partium quas exquiris,ſemel in reliquũ, quod poſt primam in integris radicis exquiſitionem reſtabit, atque iterum in productum ducas. Poſtea per eundem partium denominatorem radicem ipſam in integris inuentã multiplica, numerúmque illum partium radicis ſic productum duplica. Deinde numerum qui ex denominationis partium ſemel in radicis reliquum,atque iterum in productum multiplicatione productus eſt, ſic diuidere per numerum ex duplicatione generatum debes, vt tamen tantum ſuperſit, quantum numerus ſectionis poſtea in ſeipſum ductus,propemodum delere ſubductus poſſit. Nã in his numeris non quadratis ſemper (vti diximus) aliquot minutiæ reſtabunt.Ita numerus ſectionis radicis partes ex reliquo naſcentes monſtrabit. Verbi gratia, Si ex octonario radicem quæris: inuenies eam 2, & ſuperſunt quatuor. Iam ſi ſcire cupis quot quartæ ſint in reliquo,multiplica quatuor reliquum per quatuor denominatorem partium quas quæris: & prodeunt ſedecim. Iterũ denominator quatuor in ſedecim ductus creat ſexaginta quatuor. Deinde radicem 2 multiplica in denominatorem partium quatuor,& fient 8. duplica productum 8,& procreantur ſedecim. Iam verò ſi diuidas ſexaginta quatuor per ſedecim,quater in illis diuiſor haberi poteſt,ſed tunc nihil reſtabit quod numerus partitionis poſtea in ſe ductus deleat. quare ſi ſemel minus,quàm alioqui fieri poſſet, diuiſorem ſedecim tollamus, ter ſedecim facient quadraginta octo:& ſupererunt adhuc ſedecim:à quibus ſi numerum ſectionis 3 in ſe ductum,qui facit nouem,ſubducas, reſtant ſeptẽ. ſic numerus ſectionis oſtẽdit,ex reliquo radicis fieri tres quartas,præter minutias reſtantes 7.

ATSI IN hoc exemplo partium particulas inueſtigare perges, veluti quartarum quartas: denominatorem particularum, quas quæris, nempe quatuor ſemel in reliquum poſt ſecundam radicem

partium inuentam reſtans, videlicet ſeptem ducito: indéque fient viginti octo. Iterũ etiam eundem denominatorẽ quatuor in productum viginti octo multiplicato:& ſurgent 112. Poſtea earũdem particularum denominatorem quatuor ducere oportet in omnes partes totius radicis hactenus inuentas, quæ ſunt vndecim: nam duo integra quæ prodierũt ex prima inueſtigatione, & tres quartæ quæ ex ſecunda,faciunt vndecim quartas. quo fiet, vt quatuor in vndecim ducta procreent quadraginta quatuor : quem numerum productum ſi duplices,naſcentur octoginta octo. Per ea autem ſi ſic diuidas 112, vt numerus ſectionis poſtea in ſeipſum ductus,quoad fieri poteſt,totum diuidendum auferat,vnitas diuiſor ſufficiet:ita octoginta octo ſemel à 112 extracta,relinquunt viginti quatuor : & poſtea vnitas in ſe ducta adhuc vnum creat : quod auferendum eſt à 24,& reſtabunt viginti tria. Ita numerus ſectionis vnam quartã vnius quartæ ex ſecundo reliquo prodire manifeſtat:& ſuperſunt 23. Hac ratione etiam vlteriores particularum particulas,quatenus progredi velis,conſectari licet.

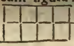
RATIONEM verò cur quadratum per denominatorem partium bis ſit multiplicandum, Socrates apud Platonem Menonis puero reddit. Cuius ſentẽtiam paucis explicabo. Quadratũ lineæ bipedalis quatuor erit pedum:nã cum figura duos pedes longa & vnum alta,duorum ſit pedum ,



ſit vt figura duos pedes longa & itidem duos alta,quatuor pedum exiſtat.



Quadratum autem duplæ longitudinis ſedecim capiet pedes . quoniam cum figura longitudine dupla & ſola duorum pedum altitudine pedes octo complectatur,



figura,quæ longitudinis duplæ , & altitudinis etiã duplæ erit , ſedecim pedes capiet.



SIMILITER in omnibus alijs quadratis multiplicandis opus eſt duplici multiplicatione: quoniam prima multiplicatio ſolum auget in longitudinem:at ſecunda quæ fit in productum, altitudini tantundem adijcit. Exempli cauſa,Eſto quadratum propoſitũ quatuor. ſi libet inquirere quadratum,cuius quodque latus duplũ ſit ad quodque latus propoſiti quadrati: duplica quadratum propoſitum:inde octo naſcuntur,& tantum figura creuit in longitudinem. Longitudo enim dupla euaſit, ſed altitudo inuariata ma-

net. igitur quadratum non eſt. Quare ſi iterum duplices productum: inde fient ſedecim. atque ita tantundem etiam in altitudinem creſcet, cum ſit dupla ad altitudinem priorem. Quod autem Socrates in lineis puero ſub oculis demonſtrauit, id Euclides in numeris, qui formari poſſunt in modum quadratorum, doctis ratione patefacit, cum inquit, Si fuerint duo numeri, ambo quadrati, erit proportio alterius ad alterum, tanquam ſui lateris ad latus illius, proportio duplicata. Si verò ambo fuerint cubi, erit proportio alterius ad alterum, tanquam ſui lateris ad latus illius, proportio triplicata.

QVOD ſi compendij dati rationem quæris, id ita habere ſub oculis videre licebit, hoc exemplo. Finge numerum propoſitum eſſe tria, huius radicem conſtat eſſe vnum, & ſuperſunt duo. Iam ſi ſcire libet quot quartæ vnius integri ad illa duo reſpondere debeant, duc denominatorem quatuor in tria, & fient duodecim. Iterum multiplica quatuor in productū duodecim, inde naſcentur quadraginta octo. Huius numeri figuram quadratam efforma, hoc modo.

1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

IN HAC figura ſedecim reſpondent ad maximum quadratum, ſub primo numero 3. nam ex ductu quatuor in vnum, & iterum in productum, fient ſedecim. Itaque hoc quadratum reſecabis, cuius radix nota 4 (quia naſcitur ex ductu radicis integrorum in denominatorem partium) ad radicem vnum in integris prius inuentam reſpondet. Quod ſupereſt autem, reſpondet ad reliquū numeri primo propoſiti: quippe quod naſcitur ex ductu denominatoris partium quatuor in reliquum 2, & iterum in productum octo, ex quo procreantur triginta duo. Ex illis autem triginta duobus, quæ vltra quadratum, quod eſt ſedecim, ſuperſunt: duodecim illa, quæ gnomonem extremum non abſoluunt (voco autem in numeris gnomonem, id quod conſtat ex duobus numerorum lateribus angulum rectum facientibus, inſtar gnomonis geometrici) veluti reliquū maximi quadrati triginta ſex ſub quadraginta octo reſecanda ſunt. Ita reſtant gnomones duo, qui cum quadrato ſedecim quod reſecuimus, conficiunt maximū quadratum 36 ſub 48 contentum: adijciúntque radici ſuperiori quatuor, quæ ad radicem vnum in integris inuentam reſpondet, duas vnitates: vti in figura liquet. & reliquum huius quadrati triginta ſex,

quod eſt 12, adieciſſet tertiam, ſi modo ad gnomonem abſoluendum, vnũ inſuper acceſſiſſet. Itaque ante oculos cernere licet, gnomonem quenque quadrato reſecato applicatum, in ſe complecti longitudinem & altitudinem ipſius quadrati ſedecim, hoc eſt duplum radicis quatuor: & inſuper in angulo reſtare quadratum numeri gnomonum: is eſt in hoc exemplo binarius. ſunt enim duo gnomones. Quare diuiſio numeri procreati ex ductu denominatoris in reliquum & iterum in productum, facta per duplum radicis, ſic tamen vt numerus ſectionis in ſe ductus ſubduci poſſit à reliquo partitionis, oſtendet quot ſint gnomones. Quo fiet vt liqueat quot partes ad reliquum reſpondentes, addendæ ſint radici prius in integris inuentæ. nam ei gnomo quiſque vnitatem in partibus addit.

AD EXERCENDOS iuuenes plurimum iuuabit nonnullas interrogationes ſubnectere, per quas ea, quæ de minutiarum inter ſe comparata magnitudine dignoſcendo, déque integrorum & minutiarum additione, ſubductione, multiplicatione, & diuiſione hactenus dicta ſunt, melius intelligantur. Sunt in his quoque quædam, quæ ad enarrationem partium quotarum in numeris & in minutijs, atque etiam ad partium aliarum in alias transformationem faciunt. Ea autẽ rudimenta ex Arithmetica Lucæ de Burgo, cuius nomen in ea arte nõ parum, neque abs re celebratur, excerpſimus: quæ ſanè ad ingenia ſtudioſorum in numeris vegetanda magnopere conducent.

Quomodo, propoſitis binis minutijs, ſcias vtræ ſunt maiores.

SI QVINQVE ſextæ conferantur cum tribus quartis: vtræ maiores erunt? Continuo ſcies, ſi vtriſque minutijs iuxta alteras notatis, numeratorum in denominatores, denominatorúmque in numeratores, obliqua multiplicatio fiat, & vterque numerus productus ſupra ſuas minutias locetur. Quippe vtercunque illorum maior erit, maiores ſuas minutias oſtendet. Hac ratione $\frac{5}{6}$ maiores ſunt, quàm $\frac{3}{4}$. nam ſupra $\frac{5}{6}$, 20 erunt: ſupra $\frac{3}{4}$, 18. At vbi integra & minutiæ cum alijs integris & minutijs conferentur: ſi integra erunt paria, de minutijs ſolis iudicãdum erit, vti ſuprà dictum eſt. Quòd ſi integra altera alteris imparia occurrant, quæ maiora ſunt, vincunt altera quantumuis magnas minutias adiunctas habentia.

$$\overset{20}{\frac{5}{6}} \times \overset{18}{\frac{3}{4}}$$

Interrogationes per Additionem ſoluendæ.

A QVO numero ſubduci debēt 13, vt reſtent 12? Item à quo numero ſubtrahētur $3\frac{1}{2}$, vt relinquantur $4\frac{1}{3}$? Huius generis interrogationes, ſiue de integris, ſiue de minutijs quæras, per additionē ſoluũtur. Nā ſi 12 ad 13 addas, ſurgēt 25, quæ ſũma eſt vnde illa 13 eximi debēt, vt reſtent 12. Similiter in minutijs, adde $3\frac{1}{2}$ ad $4\frac{1}{3}$, & fient $7\frac{5}{6}$, vnde ſubduci debent illa $3\frac{1}{3}$, vt $4\frac{1}{3}$ relinquantur.

Interrogationes per Subductionem ſoluendæ.

CVM QVO numero coniungenda ſunt 23, vt fiant 39? Item cum quo numero copulanda ſunt $6\frac{2}{3}$, vt fiant $13\frac{2}{5}$? Huiuſmodi quæſita per ſubductionem ſoluuntur. Nam ſi 23 à 39 ſubducas, reſtabunt 16: quæ iuncta ad 23 faciunt 39. Similiter in minutijs, ſubducito $6\frac{2}{3}$ à $13\frac{2}{5}$, & ſupererũt $6\frac{11}{15}$. quæ ſi iũgas ad $6\frac{2}{3}$, ſurgēt $13\frac{2}{5}$.

SI QVAERIS quantum $\frac{2}{5}$ ſuperant $\frac{3}{7}$: per ſubductionem ſcies. Nam poſtquā eo modo, quo dictum eſt deprehendiſti $\frac{3}{7}$ maiores eſſe, quàm $\frac{2}{5}$: alteras ab alteris ſubducito, & $\frac{1}{35}$ reſtabit: quæ differētiā inter has minutias mõſtrabit. Id probare licet ſicut in ſubductione. nā ſi $\frac{1}{35}$ addas ad $\frac{2}{5}$, fiet ſumma æqualis ad $\frac{3}{7}$. Itidē ſi quæratur quæ ſit differentia inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{7}$: eodem modo ſcire licet.

Interrogationes per Multiplicationem ſoluendæ.

QVIS numerus in 5 diuiſus erat, quādo in numero ſectionis 17 habentur? Item quis numerus in $4\frac{1}{7}$ diuiſus erat, quando numerus ſectionis profert $2\frac{1}{8}$? Multiplicatio rem aperiet. Nā ſi 5 in 17 ducas, fient 85: qui numerus in 5 ſectus educit in numero ſectionis 17. itidem in minutijs $4\frac{1}{7}$ ducta in $2\frac{1}{8}$, faciēt $8\frac{45}{56}$. Is numerus in $4\frac{1}{7}$ ſectus, in numero partitionis reddit $2\frac{1}{8}$.

Quomodo partium particulæ ſunt exquirendæ.

QVOMODO exquiras $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, aut $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{9}$? Hoc perinde eſt acſi quæras quæ ſunt $\frac{2}{3}$ quatuor quintarum, aut $\frac{3}{7}$ octo nonarum. Igitur huiuſmodi quæſita, quæ de minutiarum minutijs occurrunt, per multiplicationem minutiarum alterarum per alteras expediuntur. Nam $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ ſunt $\frac{8}{15}$. Item $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{9}$ ſunt $\frac{24}{63}$. quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{8}{21}$.

QVAE ſunt $\frac{3}{4}$ de $2\frac{1}{2}$? Interrogatio hæc, niſi quòd integra minutijs ſunt admixta, præcedenti ſimilis eſt. Quocirca per multiplicationem ſimili modo ſoluitur. Nam $\frac{3}{4}$ de $2\frac{1}{2}$ ſunt $1\frac{7}{8}$.

Interrogationes per Diuiſionem ſoluendæ.

PER QVEM numerũ diuiſa ſunt 36, quãdo 9 prodierunt in numero ſectionis? Item per quem numerum diuiſa ſunt $12\frac{1}{4}$, quãdo numerus partitionis habet $3\frac{1}{2}$? Huiuſmodi interrogationes per ſectionem ſoluuntur, Quippe 36 per 9 ſecta, monſtrant 4 in numero partitionis. Nam quando duo numeri aliquem componunt, ſi is per illorum alterum ſecetur, alter in numero partitionis exit. Ita cum quater 9 faciunt 36: ſi numerum illum compoſitum ſeces per 9, exeunt 4: ſi per 4, exeunt 9. Similiter $12\frac{1}{4}$ per $3\frac{1}{2}$ diuiſa, educunt $3\frac{1}{2}$ in numero partitionis.

PER QVEM numerum multiplicare oportet $2\frac{1}{2}$, vt $7\frac{2}{3}$ producantur? Hoc genus interrogationũ per diuiſionẽ explicatur. Nam ſi per $2\frac{1}{2}$ ſeces $7\frac{2}{3}$, ex ea partitione prouenient $3\frac{1}{15}$. Is eſt numerus, in quem ſi $2\frac{1}{2}$ ducas, producentur $7\frac{2}{3}$.

Quomodo exquiras in numeris, quota pars maioris numeri ſit minor: & in minutijs, quota pars maiorum minutiarum minores exiſtant.

QVOTA pars ſunt 4 de 12, aut $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? Hoc facile ſciri poteſt tam in integris, quàm in minutijs, ſi id quod minus eſt, per maius in minutias eo modo diuidas, quo de vtriſque ſuprà dictum eſt. Nam ſi 4 per 12 ſeces, fient $\frac{4}{12}$, quæ ſunt $\frac{1}{3}$ de 12. Et ſi per $\frac{3}{4}$ diuidas $\frac{2}{3}$, prodibunt $\frac{8}{9}$. Igitur dicam $\frac{2}{3}$ eſſe $\frac{8}{9}$ de $\frac{3}{4}$. Idque ita eſſe vel ex hoc capere experimentum licet, quòd ſi ſumas $\frac{8}{9}$ de $\frac{3}{4}$, id quod alteras minutias in alteras ducendo facere licet, inuenies eas eſſe $\frac{2}{3}$.

Minutiarum aliarum in alias tranſformatio.

QVOT decimæ octauæ ſunt in $\frac{5}{9}$? Hoc genus vocant minutiarum aliarum in alias tranſformationem: id quod fit per partitionem. Nam ſi per $\frac{1}{18}$ diuidas $\frac{5}{9}$, ex ea ſectione prouenient $\frac{10}{18}$, quæ ſunt $\frac{5}{9}$. ſic in $\frac{5}{9}$ comperiuntur $\frac{10}{18}$. Eodem modo quælibet aliæ minutiæ in alias quaſlibet per ſectionem tranſfigurãtur, etiam ſi integra ſunt adiuncta. Veluti ſi quæratur quot tertiæ ſint in $3\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{3}$ diuide $3\frac{1}{2}$, & prouenient $10\frac{1}{2}$. tot ſunt tertiæ in $3\frac{1}{2}$. Hunc modum partes alias in alias tranſformandi, ſuprà etiam dedimus, quando de partibus diſſimilibus ad ſimilitudinem redigẽdis præcepimus: quanquam ibi de minutiarum ſectione, quæ nõdum explicata erat, de induſtria reticuimus.

Interrogationes per plura & diuerſa ſoluendæ.

CVM quot octauis ſupputari debēt $\frac{3}{5}$, vt fiant $\frac{8}{9}$? Principio cōſydera cum quo numero iungendæ ſunt $\frac{3}{5}$, vt ſurgant $\frac{8}{9}$, id quod per ſubductionem ſcies. Nam ſi ſubducas $\frac{3}{5}$ ab $\frac{8}{9}$, reſtabunt $\frac{13}{45}$. cū eo numero copulanda ſunt $\frac{3}{5}$, vt fiant $\frac{8}{9}$. Iam verò videndum eſt quot octauas $\frac{13}{45}$ capient. id quod ſcies ſi per $\frac{1}{8}$ ſeces $\frac{13}{45}$: ſic in numero ſectionis prodibunt $2\frac{14}{45}$. cum tot igitur octauis, hoc eſt cū duabus & $\frac{14}{45}$ vnius octauæ, copulandæ ſunt $\frac{3}{5}$, vt ſurgant $\frac{8}{9}$. Eodem modo de ſimilibus fiat.

SVBTRAHANTVR $\frac{3}{5}$ à tot ſeptimis, vt $\frac{1}{2}$ ſuperſit. Principio videndū à quo opus eſt ſubducere $\frac{3}{5}$, vt $\frac{1}{2}$ reſtet: id quod deprehēdes, ſi $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$ addas: ita ſurgēt $1\frac{1}{10}$. à quibus demere oportet $\frac{3}{5}$, vt $\frac{1}{2}$ relinquatur. Deinde vide quot ſeptimæ ſunt in $1\frac{1}{10}$: id quod ſcies, ſi per $\frac{1}{7}$ ſeces $1\frac{1}{10}$. ita ſurgent $7\frac{7}{10}$, quæ ſunt 7 ſeptimæ & $\frac{7}{10}$ vnius ſeptimæ. de tot ſeptimis ſubducere oportet $\frac{3}{5}$, vt $\frac{1}{2}$ ſuperſit. Id ita eſſe probabis, ſi capias 7 ſeptimas, quæ ſunt vnum integrū; poſtea ſumas 7 decimas vnius ſeptimæ, quæ ſunt $\frac{7}{70}$, & faciūt $\frac{1}{10}$. Sic in ſumma fiunt $1\frac{1}{10}$, ſicuti iam dictum eſt. Similiter fiat in huiuſmodi quæſitis.

SVBDVCATVR differentia quæ eſt inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{5}{6}$ de tali numero, vt reſtet differentia quæ eſt inter $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{9}$. Primum per ſubductionem exquirenda eſt differentia inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{5}{6}$, ea eſt $\frac{13}{30}$. Deinde eodem modo quære differentiam inter $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{9}$, & eam inuenies $\frac{1}{18}$. Poſtea ambas eas differentias adde, & ſurgent $\frac{22}{45}$, à quo numero fiat ſubductio primæ differentiæ, videlicet $\frac{13}{30}$, & altera differentia, quæ quæſita eſt, reſtabit.

PER quot quintas multiplicāda ſunt $2\frac{1}{2}$, vt inde creſcant $7\frac{2}{3}$? Primū vide per quē numerū opus eſt multiplicare $2\frac{1}{2}$, vt fiāt $7\frac{2}{3}$: id quod ſcies, ſi per $2\frac{1}{2}$ diuidas $7\frac{2}{3}$. ita exibunt $3\frac{1}{15}$: in quæ ſi $2\frac{1}{2}$ ducas, produces $7\frac{2}{3}$. Deinde videndum quot ſunt quintæ in $3\frac{1}{15}$. id quod facile cognoſci poteſt, ſi per $\frac{1}{5}$ ſeces $3\frac{1}{15}$. Nam inde prouenient $15\frac{1}{3}$, quæ ſunt 15 quintæ & $\frac{1}{3}$ vnius quintæ. per tot quintas multiplicanda ſunt $2\frac{1}{2}$, vt fiant $7\frac{2}{3}$.

SVMANTVR $\frac{2}{3}$ de tot octauis, vt $\frac{1}{2}$ inde proueniat. Hoc tantum valet ac ſi dicas, $\frac{1}{2}$ cuius numeri faciet $\frac{2}{3}$? vel per quē numerum multiplicāda ſunt $\frac{2}{3}$, vt fiat $\frac{1}{2}$? Sicuti ſuprà edoctus es, per $\frac{2}{3}$ diuide $\frac{1}{2}$: & proueniēt $\frac{3}{4}$. Huius numeri $\frac{1}{2}$ faciet $\frac{2}{3}$. Nam $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ ſunt $\frac{1}{2}$. Iam verò vt ſcias in $\frac{3}{4}$ quot ſunt octauæ, ſi per $\frac{1}{8}$ ſeces $\frac{3}{4}$, prouenient 6. Itaque de $\frac{6}{8}$ ſumendæ ſunt $\frac{2}{3}$, vt fiat $\frac{1}{2}$.

DIVIDANTVR $7\frac{1}{2}$ per tot, vt inde proueniant $\frac{5}{6}$ de $17\frac{1}{2}$. Principio ſumendæ ſunt $\frac{5}{6}$ de $17\frac{1}{2}$ eo modo quo dictum eſt, eæ ſunt $14\frac{7}{12}$. Is numerus partitionis illius eſſe debet. Poſtea videndũ per quem numerũ ſecandæ ſunt $7\frac{1}{2}$, vt inde proueniant $14\frac{7}{12}$. id quod fiet, ſicut ſuprà dictum eſt, ſi per $14\frac{7}{12}$ diuidas $7\frac{1}{2}$: ita exibunt $\frac{90}{175}$, quæ ſunt $\frac{18}{35}$: per quæ diuidere oportet $7\frac{1}{2}$, vt inde proueniant $14\frac{7}{12}$, hoc eſt $\frac{5}{6}$ de $17\frac{1}{2}$.

DIVIDANTVR $7\frac{1}{2}$ per tot nonas, vt inde proueniãt $2\frac{1}{4}$. Primo vidẽdum per quem numerum ſecanda ſunt $7\frac{1}{2}$, vt inde proueniant $2\frac{1}{4}$. id quod ſcies, ſi per $2\frac{1}{4}$ ſeces $7\frac{1}{2}$: ita prouenient $3\frac{1}{3}$. per eum numerum diuidere oportet $7\frac{1}{2}$, vt exeant $2\frac{1}{4}$. Iam verò quot nonæ ſunt in $3\frac{1}{3}$, cognoſces ſi ea per $\frac{1}{9}$ diuidas, prouenient enim 30. Itaq; per 30 nonas diuidẽda ſunt $7\frac{1}{2}$, vt $2\frac{1}{4}$ proueniant.

DVCANTVR toties $\frac{3}{5}$ in $\frac{5}{6}$, vt inde fiant $\frac{5}{8}$. Primum $\frac{3}{5}$ ducantur in $\frac{5}{6}$, & producetur $\frac{1}{2}$. Poſtea multiplica $\frac{1}{2}$ in eum numerum, qui faciet $\frac{5}{8}$, quem inuenies ſi per $\frac{1}{2}$ ſeces $\frac{5}{8}$, ita prouenient $1\frac{1}{4}$: in quem numerum ſi ducas $\frac{1}{2}$, producentur $\frac{5}{8}$. Thema enim hoc innuit, vt numerus ex multiplicatione $\frac{3}{5}$ in $\frac{5}{6}$ productus, ducatur in eum numerum qui faciat $\frac{5}{8}$.

QVAERO, $\frac{7}{9}$ de quot ſextis exiſtunt $\frac{3}{5}$? Primum vide $\frac{7}{9}$ cuius numeri ſunt $\frac{3}{5}$. Id quod ſcire licet, ſi particulas quotas exquirens, per $\frac{3}{5}$ diuidas $\frac{7}{9}$: inde enim prouenient $1\frac{8}{27}$, cuius numeri $\frac{7}{9}$ faciunt $\frac{3}{5}$. Poſtea quære quot ſextæ ſunt in $1\frac{8}{27}$, id quod ſcies, ſecãs ea per $\frac{1}{6}$, ita inuenies $7\frac{7}{9}$. de tot ſextis $\frac{7}{9}$ exiſtunt $\frac{3}{5}$, hoc eſt de 7 ſextis, & 7 nonis vnius ſextæ.

SVBDVCANTVR $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ à tali numero, vt reſtent $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$. Primum cape $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$, quæ ſunt $\frac{5}{9}$. Poſtea ſume $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$, quæ ſunt $\frac{15}{28}$: eas adde ad $\frac{5}{9}$, & fient $1\frac{23}{252}$. de quo numero ſi ſubductio fiat, reſtabit quod quæſitum eſt.

SVBDVCATVR dimidium trium quartarum de $12\frac{1}{2}$ à tali numero, vt quinque ſextæ duarum tertiarum de $10\frac{1}{4}$ reſtent. Primũ vide quæ ſint $\frac{3}{4}$ de $12\frac{1}{2}$. eæ ſunt $9\frac{3}{8}$: quorũ cape $\frac{1}{2}$, quæ eſt $4\frac{11}{16}$, tantum eſt dimidium trium quartarum de $12\frac{1}{2}$. Deinde vide quæ ſint $\frac{2}{3}$ de $10\frac{1}{4}$, eæ ſunt $6\frac{5}{6}$: quorũ cape $\frac{5}{6}$, quæ ſunt $5\frac{25}{36}$. Iam verò ſecundum thema ſubduci debẽt $4\frac{11}{16}$ à tali numero, vt reſtẽt $5\frac{25}{36}$. Quocirca adde $4\frac{11}{16}$ ad $5\frac{25}{36}$, & ſurgent $10\frac{55}{144}$. Is eſt ille numerus à quo ſubductio fieri debet, vt reſtet id quod thema iubet.

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM TERTIVM PRAEFATIO.

POSTQVAM tam in integris quàm in partium minutijs, omnem ſupputandi ratione explicauimus: ſupereſt vt ſtudioſis paululum aperiamus quantum ea conferat ad vitam degendam. Numeros nanque ipſos per ſe conſyderandos hactenus expoſuimus: quæ res auſpicantibus parum voluptatis afferre videbatur. Nunc eos ad res numeratas applicantes, artem ipſam pandemus per artis opificium. Qua de re, dici non poteſt vtrum maior capietur vtilitas, an voluptas: quando ea, quæ ſcire perneceſſarium eſt, & rudi populo velut ænigmata videntur, ſine Sphinge ſolui poſſunt. Ad quæ perueſtiganda regulas quaſdam perutiles trademus, quibus nonnulla quæſitu difficilia, quæque prima facie ſupra humani ingenij captum rudibus videri poſſunt, facile inueniãtur: ex quibus altius intellectis, plurima alia ſimilia nullo negotio deprehendi queant. Eiuſmodi autem attingere præcipue eſt animus, cuiuſmodi in vita ſæpius occurrunt: quanquam his tortuoſa quædam, & quæ latentes anfractus habeant, ad maiorem ingeniorum exercitationem admiſcebimus. Verum enimuerò qui numerorum nodos explicare cupit, quæſtione quapiam propoſita, non temere antè reſpondere debet, quàm ſecum alte rem conſyderauit. Nam qui alioqui lingua quàm ingenio promptior quicquid incõſyderate in mentem venit, ſtolide mox blaterat, præterquam quòd aberrat à ſcopo, ridiculus exiſtimatur. Cæterũ illud admonere lectorem operæpretium putamus, vt niſi prius teneat quomodo tam integra quàm minutias ſupputet, ne hoc libello legendo ſeſe torqueat. At ſi illis pernotis, hunc in manus ſumat, cuncta tum facilia, tum iucunda ſpondemus. Sed rem aggrediamur.

REGVLA DE TRIBVS NOTIS QVARTVM IGNOTVM COMMONSTRANTIBVS. LIB. III.

PRAECIPVA omnium regula eſt,quæ de tribus notis quartum ignotum in notitiam educentibus, ab Arithmeticis traditur. Vulgus regulam auream vocat: quòd hæc cæteris Arithmeticæ regulis, velut cæteris metallis aurum,præſtet. Quam,vt clarius explicemus, pauca quædam de proportione, quatenus ad numeros attinet,præfari omnino neceſſe eſt:ſine quibus hæc regula non facile intelligi poteſt.

PROPORTIO eſt duorum numerorum certa alterius ad alterum cõparatio, atque habitudo. Propoſitis nãque quibuſvis duobus numeris, alter altero vel maior eſt,vel æqualis,vel minor. Illa itaque ratio,qua ſeſe vel æqualiter, quãdo exiſtũt æquales, mutuo reſpiciũt: vel inæqualiter,quãdo alter altero maior eſt, aut minor, proportio vocatur:quæ nihil aliud eſt quàm eorum inter ſe comparatio. Habitudo autem certa eſt,quaſi diceres, notus quidam & diffinitus alterius numeri ad alterum reſpectus.

IPSARVM verò proportionum inter ſe ſimilitudo proportionalitas nuncupatur. Eius autem duæ ſunt ſpecies: altera continua,altera ſeparata.

CONTINVA proportionalitas inter numeros eſt,quando qua proportione primus ſe habet ad ſecundum,eadem ſecundus ſe habet ad tertium : in qua ſpecie vnus atque idem numerus medius ita duobus circa ſe poſitis numeris communicat,vt ad præcedentem comparatus primæ proportionis ſit terminus: ad ſequentem verò collatus,ſecundæ ſit initium, veluti præcedentis numeri comes quidam,& ſequentis dux. Hæc autem ſpecies in paucioribus numeris quàm in tribus inueniri non poteſt:quanquam etiam in illis numerus medius,dum bis repetitur, vicem ſubit duorũ. Sint nobis pro exemplo hi tres numeri, vnum,duo, quatuor: in his enim proportionum eſt æqualitas. Nam qua proportione vnum ſe habet ad duo,eadem ſe habent duo ad quatuor: quippe vnum ad duo comparatum ſubduplum eſt, itidémque duo ad quatuor. Similis è cõuerſo eſt inter eos habitudo quando in vtraque proportione, numerum maiorem ad ſuum minorem comparamus. Nam quemadmodum quatuor ad duo duplam habent proportionem, ſic duo ad vnum dupla ſunt.

SEPARATA verò proportionalitas eſt,quam eandem diſiunctam appellare licet, cum quatuor numerorum qua proportione primus ſe habet ad ſecũdum, eadem tertius ſe habet ad quartum. In qua ſpecie, præcedentis proportionis terminus ſeparatus eſt à ſequẽtis initio. Hæc autem ſpecies in paucioribus numeris quàm in quatuor inueniri nequit: in quibus proportionum deprehenditur æqualitas, ſiue minorem vtriuſque proportionis numerum cum ſuo ipſius maiore compares,ſiue è conuerſo. Puta ſiquis hos quatuor numeros inter ſe conferre velit, nempe duo ad quatuor, & tria ad ſex. Quemadmodum enim duo ad quatuor comparata ſubdupla ſunt, ſic ſunt tria ad ſex collata. Similiter è conuerſo, quemadmodum quatuor ad duo collata,dupla ſunt,ſic ſunt ſex ad tria cõparata. Amplius in hac ſpecie permutatim fit collatio. nam qua proportione primus ſe habet ad tertium, eadem ſecundus ſe habet ad quartum. Atque ordine etiam conuerſo, qua proportione quartus ſe habet ad ſecundum, eadem tertius ſe habet ad primum. Quo fit vt præcedentis proportionis minor numerus cum ſequẽtis minore comparatus eandem habitudinem habeat, quam ſequentis maior collatus cum præcedentis maiore. Veluti in exẽplo prædicto: ſicut primus numerus binarius ad tertiũ ternarium collatus ſubſeſquialteram proportionem habet, ſic ſecundus numerus quaternarius ad quartum ſenarium eadem eſt habitudine. Itidem ordine conuerſo, quemadmodum quartus numerus ſenarius ad ſecundum quaternarium comparatus ſeſquialteram habet proportionem,ſic tertius ternarius ad primum binarium eandem habitudinem habet. Itaque numeri huiuſmodi, quorum vna eſt proportio, proportionales vocantur. De quibus ab Euclide cum in Geometria,tum in Arithmetica longe principe regula huiuſmodi traditur,Si fuerint quatuor numeri proportionales,quod ex ductu primi in vltimum producetur,æquale comperietur ei quod ex ſecundi in tertium ductu natum erit. Atque itidem quod ex ſecundi in tertium ductu procreabitur,æquale erit ei quod prodibit ex primi in vltimum ductu.

DICI NON POTEST QVANTAM inueſtigantibus lucem ad exquirenda incognita præbeat hæc regula: cuius ea virtus eſt, vt è quatuor numeris proportionalibus ſiquis ignotus fuerit, cæteri qui noti ſunt, latitantem illum prodant. Atque ideo ſi tribus numeris propoſitis, quiſpiam inueſtigare velit quis ſit quartus, ad quem tertius ea proportione ſe habeat qua primus ad ſecũ-

dum: multiplicet ſecundum in tertium, & numerum procreatum diuidat per primum: quod poſtquam factum erit, ſectionis numerus quartum demonſtrabit. Exempli gratia: ſiquis ſcire cupit quis ſit ille numerus ad quem tria ea proportione ſe habeant, qua duo ad quatuor: tria in quatuor ducat, & enaſcentur duodecim: quæ per duo diuidat, & ſex prodibunt. Ratio huius rei in promptu eſt: nam ſecundi in tertium multiplicatio producit idem quod procrearetur ſi primus in quartum ignotum multiplicaretur. Igitur ex ſecundi in tertium ductu, quartum velut in magna turba latitantem habemus: ſed quis ſit, adhuc ignoramus. Diuiſio autem per primum facta reliquam, qua tectus eſt, multitudinem ab eo ſegregat, ſolúmque relinquit, atque à cæteris deſtitutum è latebris in lucem profert. Nam quandocunque duo numeri inter ſe multiplicantur, ſi productus numerus per alterum diuidatur, partitionis numerus alterum continebit. Veluti ſi duo in tria ducas, fient ſex: quæ ſi per duo diuidas, numerus partitionis tria continebit: ſi per tria, duo. Itaque ad hunc modum quartus numerus ignoratus exquiritur.

SIMILITER ſi tres numeri continue proportionales fuerint, quod ex ductu primi in tertium producetur, æquale deprehendetur ei quod ex ſecundi in ſeipſum ductu natū erit. Et quod ex ſecundi in ſeipſum ductu generabitur, æquale erit ei quod naſcetur ex primi in tertium ductu. Ad eũdémque modũ tertius numerus ignotus exquiritur, dum ſecũdus numerus in ſeipſum ducitur, & numerus productus diuiditur per primũ: nam ſectionis numerus tertium monſtrabit. puta ſiquis duo ad quatuor comparans ſcire cupit quis ſit tertius numerus ad quem quatuor ea proportione ſe habeant, qua duo ad quatuor: medium numerũ, quatuor, in ſeipſum ducat, & ſexdecim creabit: quæ per duo diuidat, qui primus eſt numerus, & tertius numerus octonarius prodibit. Eadem nanque eſt in vtraque ſpecie & ratio & regula numerum ignotũ exquirendi: quod ad plurima inueſtiganda noſſe iuuabit.

HAS proprietates numeri proportionales, vbicunque occurrũt, ſemper ſecum deferunt, non ſolum quando per ſe conſyderantur, verumetiam cum ad res quaſlibet numerandas applicantur, vt eadem ex accidenti in rebus numeratis, quæ in numeris ipſis inuicem ſit habitudo. Quo fit vt innumera quæ vulgus imperſcrutabilia exiſtimat, ex proportionũ ſimilitudine veniant in notitiam, miraculúmque rudibus explicata præbeant.

ET VT à facilibus exemplis primum ordiamur, Quando tritici modij tres triginta nummis væneunt, inueſtigemus, octo modiorum tritici quantum erit pretium. Hic palàm videmus duas eſſe proportiones: vnam de tribus tritici modijs ad octo tritici modios: alteram de triginta nummis, trium modiorũ pretio cognito, ad octo modiorum pretium adhuc ignoratum, quod eadem habitudine ad triginta nummos reſpondere debet, qua octo modij ad tres modios ſe habent. In omnibus autem proportionibus in ordinem deſignandis, à ſiniſtra incipientes tendimus in dextram, quemadmodum in ſcribendo Græci, Latini, & omnes penè gentes faciunt. non autem ſicut in numeris per notas ſignandis Chaldæos ſequimur à dextra ordiẽtes. Itaque in hoc exemplo, tres tritici modij, qui prioris ſunt proportionis initium, à ſiniſtra primũ locum occupare debent: octo autẽ tritici modij, qui prioris ſunt proportionis finis, locum ſecundum dextram verſus. Triginta autem nummi, qui poſterioris proportionis initium exiſtũt, tertium locum à dextra teneant oportet.

3. 8. 30.

Quartus autem locus adhuc vacans expectat vt ſimili fine proportio poſterior claudatur, pretiúmque in eo reponatur, quòd ita ad triginta nummos reſpondeat, quemadmodum ad tres modios modij octo. Id autem per regulam ſuprà enarratam facile exquiras ſi tertium numerum per ſecũdum multiplices, numerúmque procreatum diuidas per primum. Igitur triginta quæ ſunt in tertio loco, multiplicata per octo quæ ſunt in ſecundo, creant ducẽta & quadraginta: quæ ſi per tria diuidantur, numerus ſectionis octoginta profert: qui numerus pretium octo modiorum indicat, & quarto loco repoſitus proportionem poſteriorem complet. Sic quando tritici tres modij triginta nummis væneunt, octo conſtabunt octoginta nummis.

AD HVIVS exempli ſimilitudinem, quandocunque in rebus numeratis ratione numerorum duæ proportiones habentur, quarum alterius vtrunque extremum tam initium à quo incipit, quàm terminũ in quo deſinit, cognoſcimus: alterius autem primum extremũ, quod eius initium eſt, ſcimus, ſed eius terminũ adhuc ignoramus: prioris initium proportionis, cuius ambo extrema nota ſunt, à ſiniſtra primo loco ponamus: eius autem terminum ſecundo loco dextram verſus: poſterioris verò proportionis initium, quod eſt notum, tertio loco notemus, & tum demũ eius

terminum ad prioris proportionis ſimilitudinem initio ſuo reſpõſurum, ſecundum regulam paulo antè mõſtratam inueſtigemus. Initium proportionis(nequis ambigat)appello eum rerum numerum qui prior in proportione præcedit, ſiue maior extiterit, ſiue minor. terminum verò eum, qui ſequitur, ſiue minor, ſiue maior fuerit. Itaque ſi poſterioris proportionis initium, quod eſt notum, numerus minor fuerit, quàm quartus inueſtigandus: minor etiam numerus in priori proportione præcedet. At ſi poſterioris proportionis initium nobis notum numerus maior exiſtat, maior itidem in priori antecedet. Similiter ſi maior rerũ numerus in priori proportione præcedit, maior etiam in poſteriori antecedat neceſſe eſt. Sin in priori præcedat minor, itidem in poſteriori fiet. alioqui proportiones ſimiles non erunt.

ILLVD autem diligenter obſeruandum eſt, vt quanuis prior proportio res vnius ſpeciei: poſterior autẽ, res alterius capiat: primus tamen à ſiniſtra ſitus numerus, qui prioris proportionis eſt initium, & ſecundus à dextra poſitus, qui finem eius complet, res eiuſdem ſpeciei numerare debeant. Similitérque tertius numerus notus, qui proportioni poſteriori dat initium, & quartus inueſtigandus, qui finem eius inuentus claudet, in eiuſdem ſpeciei rebus numerandis conſentiant: quæ res ad formandas recte proportionum ſimilitudines plurimum iuuabit. Veluti in exemplo iam dato: in quo prior proportio eſt de tribus modijs ad octo modios, poſterior autem de triginta nummis ad pretium octo modiorum inueſtigandum. Idque verum erit, vt primus & ſecundus numerus eiuſdem ſpeciei res numerent, & ſimiliter tertius & quartus inter ſe reſpondeant, non ſolum in recta proportionum ſimilitudine, quando ſicut primus comparatur ad ſecundum, ſic tertius ad quartum: verumetiam in ſimilitudine proportionum conuerſa, quando ſicut ſecundus comparatur ad primum, ſic quartus ad tertium. Cæterum ſi permutatim proportiones velis comparare, nempe prioris initium ad initium poſterioris, & terminum prioris ad poſterioris terminum: tunc primus & tertius numerus eiuſdem ſpeciei res numerabunt, & tertius & quartus itidem facient: veluti ſi in exemplo dato, cõpares tres modios ad triginta nummos, & octo modios ad pretium inueſtigandum. Quem modum ſimilitudinem proportionum fabricandi, tametſi ſit difficilior, plerique omnes qui ſupputare docent, magis nunc obſeruant: quippe qui faciliorem modum rectam proportionum ſimilitudinem

formandi ignorent. Et ad permutatam comparationem ſequendam, incitari videntur à mercatorum more, qui omnia pecunia æſtimant, quærúntque inter ſe quanti merces quælibet vendantur, quid pro ſingulis, quid pro vniuerſis ſit ſoluendum: comparationem aliarum rerum plurimum ad pecuniam, nonnunquam ipſarum inter ipſas facientes. Veruntamen vtrancunque viam ſequare, regula iam data reſpõdebit: quæ, ſiue recta, ſiue permutata proportionum comparatio fiat, ſemper cum ea congruet. Nobis autem viſum eſt iuuenum inſtituendorum gratia, in ſingulis ſequẽtibus quæſtionibus ſolum rectam proportionum comparationem, in qua quæque proportio ambo ſua extrema eiuſdem ſpeciei habet, vt intellectu faciliorem, & magis naturalem ſequi: ne ſi vtranque in ſingulis, quod nihil neceſſe eſt, inſereremus, faſtidium oboriretur legentibus. Quamobrem ante omnia multa cautione eſt opus, ne in rebus numeratis proportionum ſimilitudo, quæ ratione numerorum conſyderatur, male ſit concepta, néve pro ſimilitudine diſſimilitudo nos fallat. At poſtquam recta proportionum ſimilitudo cogitatione deprehenſa eſt, cætera per datam regulam facile explicantur.

PORRÒ vulgus in communi ſermone ferè de numero inueſtigando primùm quærit: veluti ſi quiſpiam interroget, Quanti conſtabunt tritici modij quatuor, quando centum vendũtur mille nummis? Hanc interrogationem conſyderantes, in ea proportiones duas ſtatim deprehẽdemus: alteram inter centum modios & quatuor modios, habentem notum vtrunque extremũ: alteram inter mille nummos & quatuor modiorum pretium adhuc ignoratum. Igitur nihil reſpicientes ordinẽ quærentis vulgi, quod ſemper quidlibet, vt in buccam venerit, loquitur: nobiſcum conſyderemus proportionem illam inter centum modios & quatuor modios, quam vulgus cum altera confundit: ambo extrema nota habere, atque ideo alteri præponendam eſſe: alteram autem proportionẽ, de mille nummis ad pretiũ adhuc ignoratũ poſteriorẽ fore debere. cuius initiũ notũ, quia maior exiſtit numerus, quàm quartus inueſtigandus, maior itidem numerus in priori proportione præcedet. quocirca primo loco maiorẽ prioris numerũ, nẽpe centum notemus: eius autẽ minorẽ numerũ quatuor, loco ſecũdo: tertio verò loco ſignemus poſterioris initium notũ, videlicet mille.

100 4 1000

Hac ratione proportiones in ordinem aptantes, ſecundũ datam

regulam mille per quatuor multiplicemus, & prodibunt quatuor millia, quæ per centum ſecta faciunt in numero partitionis quadraginta,qui numerus eſt quæſitus.

IN HOC autem exemplo, ſicui permutatam proportionum ſimilitudinem ſequi magis placet,ſic eas comparabit,Sicut centum modij ſe habent ad mille nummos,ſic quatuor modij ad pretium inueſtigandum:vt tertio loco numerus medius ponatur , tertiúſque numerus in loco medio: tantilla enim differentia eſt inter rectam proportionum ſimilitudinem,& permutatam. Veruntamen ſiue hanc,ſiue illam comparationem ſequi libet,nihil reſpiciemus ad ordinem quærentis vulgi : quin potius ad hanc exempli formam alia tortuoſe quæſita ad rectam proportionum ſimilitudinem cogitando reduci poſſunt.

HIS DVOBVS exemplis in vtraque proportione res vænales præceſſerunt,pretium verò ſequutũ eſt de quo fuit quæſtio. Nunc exemplum petamus vbi præcedat pretium, quæſtio autem de rerum vænaliũ numero ſequatur. Quando octoginta nummis tritici modij octo emuntur,quot haberi poſſunt pro triginta nummis? Hic manifeſte ſunt duæ proportiones, altera de 80 nũmis ad nummos 30. altera de octo modijs ad numerũ modiorum inueſtigandum . Et quia in poſteriori proportione numerus modiorũ notus maior eſt, quàm is qui inueſtigatur: pretiũ quod eſt maius octoginta nummorũ in priore proportione primũ locũ tenet: minórque nũmorum numerus ſecundũ:tertium autem occupat octo modiorũ numerus,qui eſt notus. Quæſtióque fit de numero modiorũ ignoto. Digeſtis igitur in ordinẽ numeris, ad hunc modũ,

80, 30. 8.

triginta per octo multiplicentur , & ſurgent ducenta quadraginta: quæ ſi per octoginta ſint ſecta , numerus ſectionis tria continebit. ſic quando nũmi octoginta reddunt octo modios, triginta nummi afferent modios tres . Ita ſi primum exemplum ſuprà datum cũ hoc conferas,tam illius proportionũ loca, quàm earũ extrema ipſa,cõuerſa eſſe in hoc exẽplo videbis. qui illic quartus numerus erat,hic primus eſt:qui illic tertius,hic ſecũdus:qui illic ſecũdus,hic tertius:qui illic primus,hic quartus & poſtremus:quæque illic proportio erat prior,hîc poſterior reperitur,vt facile cuiuis appareat res numeratas rationem numerorum etiam conuerſorum ſequi,nihílque referre quæ res numerẽtur,dummodo proportio illa cuiꝰ in rebus numeratis ambo extrema ſunt nota,præ-

cedat, illáque cuius initium ſolum notum eſt, ſequatur.

ATQVE ideo ſiquis experiri cupit an in quarti numeri inueſtigatione error ſit admiſſus, hac ratione id facile deprehendet, vt in proportionum comparanda ſimilitudine, ambarum ſedes atque etiam extrema ipſa conuertat: veluti in exemplo iam dato, quod omnia primo contraria habet. Vel ſi magis libet: ſedes earum ſolas mutet, poſteriorémque ex priori faciat, atque ex poſteriori priorem. Quippe mutatis proportionum ſimul locis, atque extremis, vel etiam locis ſolis, ſi nihil erratum erit, neceſſe eſt eorum numeros ſedes mutatas ſequi. quare ſi alij numeri in his inuenti fuerint, propter errorem calculi totum opus ab initio repetendum eſt. Mercatorum vulgus ſumens experimẽtum num quis error interuenerit, hanc locorum in proportionibus mutationem, regulam de tribus conuerſam vocat, cum vna tantum ſit regula, ſecundum quam cuique licet, quam velit quæſtionem explicandam proponere.

QVÒD ſiquando eueniat vt rerum numerus ex ſecundi in tertium ductu, proueniens numero diuiſore ſit minor, ſectionémque non ferat, tum numerus ille minor in numerum partium in ſe contentarum eſt multiplicandus, vt diuiſoris ſectionem maior per incrementum factus recipere ſufficiat. Conſyderandúmque eſt, quale rerum genus numerus ille numerat: puta an argenti libras, aut aureos, qui in nummorum, quibus æſtimantur, numerum multiplicari poſſunt: an maiora pondera, quæ in numerum librarum, aut vnciarum duci: an dolia vini aut olei, quæ in amphorarum, congiorũ, aut ſextariorum numerum multiplicari: an iugera, quæ in perticarum, aut pedum numerum ducta augeri poſſunt: vel quicquam aliud ſimile. Exemplum huiuſ rei afferamus. Centũ oues emptæ ſunt aureis viginti, quãti conſtiterũt tres? Proportionibus recte in ordinem redactis ad hunc modum,

100 3 20

Secundus numerus ternarius in tertium viginti aureorum ductus creabit ſexaginta: qui numerus quoniam per centum diuidi nequit, ſoluamus aureos illos in viliorem pecuniam. & quoniam ſinguli aurei (de angelis nunc loquor) æſtimantur octoginta nũmis, in illum nummorum numerum 60 ducamus: & prodibunt quatuor millia & octingenta: qui numerus maior eſt diuiſore cẽtenario, per quem ſectus in numero partitionis prodire faciet quadraginta octo. Sic quando 100 oues emuntur 20 aureis, 3 conſta-

bunt 48 nummis. Nec quempiam illud moueat, quòd in ſecunda proportione finis initio, id eſt quartus locus tertio non videatur reſpondere, quòd hic nummos, ille aureos habeat: cum vterque locus idem rerum genus, nempe pecuniam contineat, licet pecunia maior in minutiorem, vélut in partes ſuas ideo ſoluta ſit, vt diuiſoris ſectionem numerus diuidendus caperet.

VBI AVTEM ex diuiſione reliquum quidpiam erit quod per diuiſorem amplius ſecari non poſſit, ſimiliter reliqui numeratorem in partes ſuas notas, ſiquas huiuſmodi habeat: alioqui in partes pro arbitrio denominandas, multiplicetur, vt diuiſoris, qui denominator eſt, ſectionem maius factum pati poſſit. quæ cum peracta erit, numerus partitionis manifeſtabit: pro quot partibus, vel notis, vel denominandis ipſum reliquum valeat. quemadmodum in ſuperiori libro de reliqui æſtimatione facienda diximus. Exempli gratia, Si nouem vlnæ panni (vt mercatoris vocabulis vtamur) conſtiterunt tribus aureis, quanti empta eſt vna? Proportionibus in ordinem diſpoſitis, vt nouem primo loco ſint, vnum ſecundo, tria tertio,

9. 1. 3.

quia vnitas nullum numerum multiplicat, ſolum ſupereſt vt tertius trium aureorum locus diuidatur per primum numerum nouem. quod quoniam fieri nequit, redigendi ſunt aurei ad viliorem pecuniam. aureúſque puta, æſtimetur 80 nũmis (nam ſic æſtimãtur angeli) numerúſque aureorum ductus in numerum nummorum procreabit 240. quæ cum per nouẽ ſecta ſint, numerus partitionis proferet 26 nummos: & reliquæ erunt $\frac{6}{9}$. Et quia nummi partes notas habent quadrãtes, quorũ quatuor pro nũmo valent, ſex in quatuor ducamus: & fient 24. iterum ea ſecta per nouem, in numero partitionis educunt duo, & adhuc reſtãt $\frac{6}{9}$ vnius quadrãtis. Et quia quadrãs minores partes apud nos notas nõ habet, per partes quaſlibet denominandas, puta quatuor, illum æſtimemus. iterũmque ducamus ſex reliqui numeratorem in quatuor: & denuo fient 24. quæ rurſus diuiſa per nouẽ in numero ſectionis duo facient, & adhuc ſuperſunt $\frac{6}{9}$ vnius quartæ partis vnius quadrantis. quas ſi cuipiã amplius minutias ſectari libet, poteſt vltrà diuidere in partes quaſcunque velit. Igitur quando nouem vlnæ tribus aureis emptæ ſunt, vna vlna cõſtitit 26 nummis, duobus quadrantibus, & duabus quartis vnius quadrantis, ac ſex nonis vnius quartæ partis vnius quadrantis. $\frac{6}{9}$ reductæ faciunt $\frac{2}{3}$.

tur ſecundæ $\frac{7}{2}$. Locúſque ſecundus ſolas continet minutias $\frac{3}{4}$. Locus integrorum tertius in ſpeciem minutiarum ſic ſcribendus $\frac{6}{1}$. Itaque ſic locatis minutijs $\frac{7}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{1}$ ex ſecundi loci in tertium ductu naſcentur $\frac{18}{4}$. quæ diuiſa per $\frac{7}{2}$ educunt $\frac{36}{28}$. Ea conſtituunt vnũ integrum. & reſtant $\frac{8}{28}$: quæ ad minimam nomenclaturam redactæ, faciunt duas ſeptimas. Atque hoc pacto, quando tres vlnæ ſerici cum dimidio emptæ ſunt ſex aureis, $\frac{3}{4}$ vnius vlnæ vno aureo & duabus ſeptimis conſtiterunt. Quòd ſi minutiarũ minutiæ vel ſimplicibus minutijs, vel integris admixtæ ſeſe offerent: antequam opus aggredimur, reducenda ſunt omnia in vnam minutiarum faciem, queẽadmodum ſuperiori libro docuimus: poſteáque fiat multiplicatio & diuiſio ſicut in minutijs fieri conſueuit.

Pecuniæ cuiuſuis in quamlibet permutatio quomodo ſit facienda. Quæſtio II.

SI QVISPIAM ab aliqua regione in aliã longe profecturus, ad periculum à latronibus vitandũ, pecuniã eius nationis vnde proficiſcitur, menſarijs dare velit, vt eius æſtimationẽ illic, quò iter deſtinat, recipiat: ſciréque cupiat quantum in illius regionis pecunia ſit habiturus, id hoc modo facillime dignoſcat. Principio maiorẽ quamuis pecuniã in viliorem per multiplicationem redigi, contráque viliorem in quamlibet maiorem per diuiſionem reduci, penè manifeſtius eſt quàm vt ſit admonendũ. Quamobrẽ pecuniã permutaturus primum animaduertat, quot minutioribus nummis illius regionis vbi fit permutatio, mẽſarius vnum aureũ regionis alterius, quò iter adornat, æſtimat. qua de re cũ eo pacta inire oportet. Quod cũ obſeruauerit, omnem illam pecuniæ ſummã, quam menſario daturus eſt, ſiue in argenti libris, ſiue in aureis fuerit, in eoſdem nummos minutiores redigat. Id quod fiet è veſtigio: ſi totius ſummæ permutandæ numerum in eum nummorũ eorundẽ numerum, quo pars ipſius, puta libra vna vel aureus vnus æſtimatur, multiplicet. Deinde numerum ex hoc enaſcentẽ per ſummam æſtimationis vnius aurei illius regionis, quò iter parat, diuidat. & numerus ſectionis patefaciet quot illic aureos ſit recepturus. Cuius rei ratio per regulam de tribus notis quartum ignotum proferentibus, palàm nobis conſtabit, vti mox in exemplo dicemus.

ROMAM profecturus quiſpiam mille aureos angelos octoginta nummis ſingulos æſtimatos, menſarijs tradidit, vt Romæ ei redderent aureos ducatos. conueníſtque in ſingulos quinquagin-

ta quatuor nummos, Romæ ſingulos aureos ducatos reddi. ſcire cupit quot ducati Romæ ſunt reddendi. Primū aureis angelis mille multiplicatis in octoginta nummorum numerum, qui numerus vnius aurei æſtimationem capit, ſurgunt octoginta nummorum millia. quæ nummorum ſumma facile in ducatos commutatur, ſiquis ſecum conſyderet, Quæ proportio eſt inter quinquaginta quatuor nummos, qui pro vno ducato de compacto valent, & octoginta nummorū millia, quibus mille aurei angeli æſtimantur: eandem inter vnum ducatum & numerum ducatorum inueſtigandum eſſe debere. Vel ſi magis libet, permutatim, Quæ proportio eſt inter quinquaginta quatuor nummos & vnum ducatū, eandem eſſe inter octoginta nummorum millia & numerum ducatorum exquirēdum. Itaque proportionibus in ordinem diſpoſitis, ad hunc modum 54. 80000 1.
quia ſecundus numerus octoginta millium, per tertium vnitatis numerum nihil augetur, ſola ſecundi diuiſio per primum numerū 54 facta ſufficiet, quæ in numero partitionis prodire faciet mille quadringenta octoginta vnum. & viginti ſex numeri ſuperſunt, qui numerus eſt aureorum, Romæ ex pacto reddendus.

ET QVANVIS in pecuniarū permutatione, quæ ab alia regione in aliam frequentatur, pecunia aliqua vilior plurimum quæratur, qua vtriuſque nationis pecunia maior ſecundum ſui pretium prius æſtimetur, quàm ad proportionum regulam iam datam numeri applicari poſſint, veluti in exēplo proximo, qui modus & facilis eſt, & expeditus: interdum tamen breuior via reperitur. Quippe quando aliquis argenti, librarum, aut aureorū, aut cuiuſuis pecuniæ numerus illius regionis, vbi fit permutatio, alicui vel librarum, vel aureorum, vel cuiuſlibet pecuniæ numero, in ea regione, in quam commutamus, ita ex pacto reſpondet vt nihil omnino vel deſit, vel ſuperſit: tum abſque vlla in viliores nummos reductione facienda, ſtatim ad proportionum regulam numeros applicabimus. Exempli gratia. tres aurei angeli pro quinque coronatis Gallicis valent. mille angeli quot coronatos reddent? Cōſyderatis proportionibus, deprehendemus, quæ proportio eſt inter tres aureos angelos & mille, eandem inter quinque coronatos & numerum coronatorum exquirendum eſſe debere. Vel ſi libet, permutatim, Quæ proportio eſt inter tres aureos angelos & quinque coronatos, eandem eſſe inter mille angelos, & numerum coronatorum inueſtigandum. 3. 1000. 5.

Facientes igitur id quod iubet regula, comperiemus aureos angelos mille reddere coronatos mille ſexcentos ſexaginta ſex & duas tertias vnius coronati.

Societatis regula. Quæſtio III.

TRES MERCATORES ſocietatem inierunt,ſuas quiſque pecuniæ partes in medium conferentes. quorum primus nonaginta aureos attulit, ſecundus ſexaginta, tertius quinquaginta. atque impigre mercaturam exercētes centum aureos lucri fecerunt: quos inter ſe diuidere cupientes,ambigunt quantum cuique ſecūdum pecuniæ collatæ portionem,de lucro ſit ceſſurū. Hanc quæſtionem altius nobiſcum conſyderantes, confeſtim animaduertemus(id quod in omni ſocietate ſemper conſyderandum eſt) lucrū hoc commune centum aureorum, ex cōmuni omnium accreuiſſe pecunia. & quemadmodum pecunia cōmunis commune lucrum peperit,ita ſuam cuiuſque pecuniā id attuliſſe lucri,quod ad quenque pro ſua portione pertinebit. Quare ſicut omniū partes, ſimul additæ ſe habent ad ſingulorum partes:ſic omnium commune lucrum ad lucrum ſingulorum ſe habere debet.Et permutatim,ſicut omnium partes ſimul additæ ſe habēt ad cōmune lucrum,ſic partes ſingulorum ad ſingulorum lucrū ſe habere debent.Itaque hæſitationem hanc ad regulam quatuor proportionalium applicantes,ſtatim eam explicabimus. Quocirca primus locus omnes omnium partes in ſocietatē collatas ſimul additas habere debet. Secundus autem ſuam cuiuſque pecuniæ partem ſeparatim aliā ſub alia notatam. Tertius verò commune lucrum. Poſt eam numerorum ordinationem pecuniæ pars à quolibet collata ſeorſum in lucrum commune ducatur, & numerus ex hoc enatus per omnium partium ſummam ſimul additam diuidatur.Ita cuiuſque partitionis numerus lucrum ſingulorū patefaciet, quod quarto loco è regione partis cuiuſque collatæ, ſtatuendum eſt eo modo qui ante oculos numerorum notis hic ſubſignatur.

	90		Primo 45.
200	60	100	lucri fiunt pro Secūdo 30.
	50		Tertio 25.

In omnibus autem ſocietatis regulis,an recte ſit ſupputatum,ſpecimen hinc capere licet. ſi lucra ſingulorum ſimul addita commu nis lucri ſummam reddant.

MINVTIAE etiam ſiquæ reſtabunt,per additionem colligan-

tur:atque integra,quæ ex his creabuntur,integrorum addantur nu mero.Cuiuſmodi exemplum erit.ſi primus contulit quadraginta, ſecundus triginta,tertius viginti.de qua pecunia communi quinquaginta lucri fiunt.

	40			Primi 22 & $\frac{20}{90}$	quæ faciunt	$\frac{2}{9}$
90	30	50	Lucrũ	Secũdi 16 & $\frac{60}{90}$	quæ faciuut	$\frac{6}{9}$
	20			Tertij 11 & $\frac{10}{90}$	quæ faciunt	$\frac{1}{9}$

Reliquæ omnes minutiæ in hoc exemplo ſimul additæ faciunt vnum integrum.& ſingulorũ lucra addita creant quadraginta nouem:ſic ſurgunt quinquaginta,quæ communi lucro reſpondent.

Societatis regula ſecũda,in qua temporum diuerſitas interuenit. Quæſtio IIII.

TRIVM mercatorum ſocietatẽ ineuntium, primus quadraginta quatuor aureos contulit in medium,atque octo menſibus in ſocietate permanſit.Secundus triginta duos cõferens aureos, perſtitit in ſocietate menſibus ſex. Tertius, qui attulit aureos viginti quatuor,in ſocietate menſes quatuor manſit. ex quibus lucri facti ſunt aurei octoginta. Ambigi poteſt quantum cuique lucri,ſecundum temporis & pecuniæ quantitatem, debeatur. In hac hæſitatione atque eius ſimilibus, altius intuenti primum illud occurrit, quod in omni ſocietate conſyderandum eſſe ſuperiori regula diximus: videlicet vt ſicut omnium partes ſimul additæ ſe habent ad ſingulorum partes:ſic omnium commune lucrum ad lucrum ſingulorum ſe habere debeat.Et permutatim,ſicut de omnium partibus ſimul additis occurrit comparatio ad commune lucrũ: ſic de ſingulorum partibus ad lucrum ſingulorum. Cæterum hæc comparatio geminam conſyderationem habet, tam temporis inæqualis,quàm inæqualis pecuniæ.quorum vtrunque ad cuiuſque lucrũ excutiendum parem cogitationem requirit: nec alterum ab altero ſeiungi poteſt.quãdo nec pecunia cuiuſque ſine ſuo tempore,cuique lucrum attulit,nec cuiuſque tempus ſine ſua pecunia. Immò verò ſicut omnium pecunia ſimul addita atque omnium tempora coaceruata,commune lucrum vniuerſis peperit:ita cuiuſque pecunia connexa cum ſuo tempore,cuique lucrum dedit. Itaque cũ de pecunia & tempore cuiuſque,quæ ſeparari non poſſunt,gemina comparatio ſimul fieri debeat,tam ad aliorum pecunias & corũ

tempora, quàm ad commune lucrum,& lucrum cuiuſque ſuum: pecuniam cuiuſque per ſuum ipſius tempus multiplicare oportet. Quo fiet vt numerus ex hoc productus proportiones partium ſuarum, eorum inquam numerorum, ex quibus in ſe ductis enatus eſt, comprehendat. Etenim ſecundum Euclidis ſcitum, Omnium duorum numerorum compoſitorum proportio alterius ad alterũ eſt ex laterum ſuorũ producta proportionibus. Latera numerorũ Euclides vocat quorũ multiplicatione numeri producuntur. Poſt quam multiplicationem cuiuſque temporis cum ſua ipſius pecunia ſeparatim factam, quoniam ſingulæ pecuniæ partes cum ſingulis temporis multiplicando coiuerunt: vnúſque numerus ſic de vtroque factus eſt vt de gemina comparatione proportio vnà virtutem vtriuſque complectens prodiuerit: numeri ipſi procreati ſeorſum ſunt notãdi, vt ad regulã ſotietatis applicari poſſint. Quippe ſicut omnium pecunia cum omnium tempore coniuncta ſe habet ad ſuam cuiuſque pecuniam copulatam cum ſuo tempore: ſic lucrum omnium commune ad ſuum cuiuſque lucrum ſe habere debet. Et permutatim, ſicut omnium pecunia cum omnium tempore copulata ſe habet ad commune lucrum, ſic ſua cuiuſque pecunia cum ſuo tempore connexa, ad ſuum cuiuſque lucrũ ſe habere debet. Itaque per regulam quatuor proportionalium quæſitum explicabitur, ſi numeri omnes ex temporis & pecuniæ multiplicatione ſeorſum procreati ſimul addantur: ſummáque ex his collectæ primus locus detur. Secundus autem aſſignetur numeris ſeorſum enatis ex vnius cuiuſque pecuniæ ductu in ſuum tempus, vt ſeparatim alius ſub alio notetur. Tertius verò locus lucrum commune partum habeat. Deinde ſeorſum ſecundi loci numerus cuiuſque procreatus ducatur in commune lucrũ, quod tertij loci eſt: numerúſque ex hoc enatus per primi loci numerũ diuidatur, quẽadmodum in proxima ſocietatis regula dictum eſt: & numerus ſectionis declarabit quantum cuique lucri ſecundum temporis & pecuniæ quantitatem debeatur. quod quarto loco è regione cuiuſque pecuniæ reponendum eſt, ad hunc modum,

	352			Primus 44
640	192	80	Lucrum facit	Secũdus 24
	96			Tertius 12

Societatis regula tertia, quando temporibus intermiſſis, variæ ſummæ interdum communicatæ, interdum ſubductæ fuerunt. Quæſtio v.

QVATVOR mercatores ſocietatem inierunt biennio duraturam: paciſcentes, vt pro portione pecuniæ conferēdæ lucrum cuique accreſceret. Quorum primus ab initio triginta aureos contulit, & poſt octauum menſem tranſactum, eorum decem de medio ſubduxit. iterúmque viceſimo menſe inchoante, duodecim aureos in ſocietatem intulit. Secundus à principio viginti quatuor aureos attulit, ac poſt ſextum menſem abſtulit octo. denuóque ſextidecimi menſis exordio, quatuordecim in commune exhibuit. Tertius ſtatim ab inita ſocietate, viginti aureos intulit, peractíſque menſibus ſeptem, omnem ſuam pecuniā de medio exemit. rurſuſque menſe decimo octauo incipiente, ſexdecim impoſuit aureos. Quartus demum ſeptimo menſe inchoante decem & octo aureos pro ſe contulit, atque horum nouem abſtulit poſt quartum menſem finitum. iterúmque decimo ſeptimo menſe exordiente, quindecim in ſocietatem addidit. De quorum omnium pecunia cōmuniter in ſocietatem collata, lucri facti ſunt aurei centū. Ambigitur, tranſacto biēnio quantum cuique lucri cedet. Hæſitatio hæc propter intricatam tum ſummarum, tum temporum varietatem, plus induſtriæ quàm acuminis exigit. Siquidem propius rem contemplantibus, illud manifeſtum eſt. ſicut communis omnium pecunia cum omnium temporibus coniuncta commune lucrum attulit: itidem ſuam cuiuſque pecuniam cum ſuo tempore copulatam ſuum cuique lucrum afferre par eſſe. Singula igitur cuiuſque mercatoris tempora, quibus ſumma quæque ipſius in ſocietatem communicata, nec de medio exempta fuit, in pecunias ipſorum temporum ſeorſum multiplicata, ſimul ſunt addenda. Quæ pecuniarum cum tempore coniunctio, cum ad eum modum per ſingulos mercatores abſoluta erit, quatuor proportionalium regula rem totam ſic expediet, quemadmodum proximo capite latius edocuimus. Quod ipſum ſatis fuerit eruditis oſtendiſſe. Cæterum quoniā hæc pecuniarum in ſocietatem importatio atque exportatio, alio atque alio tempore facta maiorem in fronte quàm in receſſu difficultatem oſtentat: ne quem terreat tam varia rerum facies, nodum hūc explicabimus, vt auſpicantibus viā monſtremus, ſimilia, ſiqua occurrent, ſoluendi.

Primus itaque mercator à principio triginta aureos octo menſibus in ſocietate habuit. vt igitur tempus illud cū pecunia copuletur, 8 in 30 ducātur, & fient 240: quæ ſeorſum tantiſper, dum alia expediuntur, notanda ſunt. Poſt octauum menſem finitum, vſque ad vigeſimum, decem aureis ſubductis, ſoli 20 reliqui manſerunt, vndecim menſibus medijs. 11 igitur in 20 ductis, creantur 220: quæ ſimiliter interim notentur ſeorſum. Poſtea viceſimo menſe, ad viginti aureos, qui adhuc in ſocietate remanſerunt, alij 12 ſunt illati. Hæ duæ ſummæ ſimul additæ faciunt aureos 32: qui mēſibus quinque vſque in finem anni communes fuerunt. Igitur 5 in 32 ducta, educunt 160. quæ ſub alijs ſummis ſeorſum notatis ponātur. Deinde illæ omnes ſummæ ſeorſum notatæ ſimul addantur, & prouenieēt 620. Ea ſumma ſurgit ex omnibus primi mercatoris tū ſummis, tum menſibus ſimul coeuntibus. Secundus autem mercator ab initio 24 aureos ſex menſibus in ſocietatem communicauit. quare 6 in 24 ducta producent 144: quæ ſeorſum notentur. A ſexto autem menſe tranſacto vſque ad ſextumdecimum, nouem menſibus medijs, cum octo aurei ſubducti eſſent, reliqui erant 16. quocirca 9 in 16 ducta creabunt 144, ſeorſum ſimiliter notanda. Demum menſe decimoſexto 14 aurei in ſocietatem illati additi ad priores 16, faciunt 30, qui nouem menſibus reliquis cōmunes fuerunt. 9 itaque in triginta ducta procreabunt 270, quæ ad reliquas ſummas ſeorſum notas addita producunt 558. Ea ſumma eſt & tēporum & pecuniæ ſecundi mercatoris ſimul coniunctorum.
Tertius mercator ſtatim ab inita ſocietate viginti aureos inferēs, ſeptem menſibus eos in ſocietate reliquit. & ideo 7 in 20 ducta, creabunt 140. quæ ſeorſum ſignentur. Poſt menſem autem ſeptimum finitum, cum pecuniam ſuam omnem exemiſſet, nihil cum cæteris habuit commune vſque ad decimumoctauum menſem: in cuius initio denuo 16 in ſocietatem intulit. quæ per 7 numerum menſium relictum multiplicata producunt 112. ea priori ſummæ ſeorſum notatæ addita procreant 252. Quæ ſumma eſt & temporum & pecuniarum tertij mercatoris ſimul coeuntium.
Quartus mercator ſeptimo demum menſe inchoāte 18 aureos cōferens, quatuor menſibus eos in ſocietate continuit. quamobrē 4 in 18 ducta, progenerant 72. quæ ſeorſum ſubnotemus. A fine autem quarti menſis poſt illatam pecuniam tranſacti, vſque ad menſem decimūſeptimū, ſublatis nouē aureis, adhuc nouē reſtabant: menſibus ſex medijs. ea propter 6 in 9 ducta educunt 54: ſeorſum

& ipſa notanda. Decimo ſeptimo menſe incipiente, ad 9 quæ in ſocietate remanſerant 15 adiũxit, quæ faciunt 24. ea per 8 numerum menſium relictum multiplicata, educent 192. quæ ad alias ſummas ſeorſum ſignatas addita, perficient 138. ea ſumma eſt tum mẽſium, tum pecuniarum quarti mercatoris. Iam verò ſingulorum mercatorum temporibus cum ſuis pecunijs connexis, ſupereſt vt omniũ ſummæ ſeorſum annotatæ ſimul addantur. Inde ſurgent 1748. quæ ſumma ex omnibus tum pecunijs, tum menſibus omniũ mercatorum collecta primum locum tenebit. Secundum verò ſingulorum ſummæ tum pecunias cuiuſque tum menſes complectentes ſeorſum aliæ ſub alijs notatæ. Tertium autem locum commune lucrum habebit. Deinde ſecundum regulam quatuor proportionalium multiplicatio, & diuiſio fiat: & lucrũ in quarto loco patefiet, ad hunc modum,

	620		Primi 35 & $\frac{205}{437}$
	558		Secũdi 31 & $\frac{403}{437}$
1748		100 Lucrum	
	252		Tertij 14 & $\frac{182}{437}$
	318		Quarti 18 & $\frac{84}{437}$

Diuerſarum regionum ponderis coæquatio.
Quæſtio VI.

CENTVM pondo ab Alexandria in Angliam deportata reddũt pondo ſeptuaginta quinque: quantum reddent Alexandriæ Anglica pondo ducenta triginta ſex? Rem conſyderanti facile ſuccurrit, quæ proportio eſt inter ſeptuaginta quinque pondo Anglica & ducenta triginta ſex Anglica, eandem eſſe inter cẽtum Alexandrina & numerũ quem de Alexandrinis quærimus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter ſeptuaginta quinque Anglica & centum Alexandrina, eandem inter 236 Anglica, & numerum quem de Alexãdrinis quærimus, eſſe debere. Quocirca primo loco poſitis 75, ſecundo 236, tertio 100: quatuor proportionalium regula deprehẽdit ducẽta triginta ſex pondo Britannica reddere Alexandriæ trecenta quatuordecim & $\frac{50}{75}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$.

Anglica	Anglica	Alexandrina	Alexandrina
75	236	100	314 $\frac{50}{75}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$.

Lucri exploratio. Quæſtio VII.

SI DE centum aureis aurei duodecim in annum lucri fiant,ſecundum eam rationem de aureis ſeptuaginta nouem quantum lucri in annũ creſcet? Facile eſt explicatu. nam quæ proportio eſt numeri centenarij ad ſeptuaginta nouem,eadem erit numeri duodenarij ad lucrum quæſitũ. & permutatim,quæ proportio eſt numeri centenarij ad duodecim,eadem erit de ſeptuaginta nouem ad lucrum inueſtigatum. Diſpoſitis itaque in ordinem numeris,vt primum locum centum tenant, ſecundum ſeptuaginta nouem , tertium duodecim:quatuor proportionaliũ regula demonſtrat ex aureis 79 lucri fieri aureos nouem,& $\frac{48}{100}$ quæ ſunt $\frac{12}{25}$.

Aurei	Aurei	Lucrum	Lucrum
100	79	12	9 $\frac{48}{100}$, quæ ſunt $\frac{12}{25}$.

Hoc lucrum per omnia par eſt vſuræ centeſimæ , qua maiorẽ apud Romanos leges non permittunt. De ſingulis nanque centenis duodena quotannis in fœnus vſura centeſima exigit. quæ ideo centeſimæ nomẽ habet,quòd cum in menſes vſuræ debeãtur,pars ſortis centeſima ſingulis menſibus in vſuram venit,centeſimóque demum menſe ſortem fœnus æquat . Intra centeſimam minores vſuræ interdum centeſimæ dodrantem,interdum beſſem,in menſes reddunt: quæ etiam ipſe graues exiſtimãtur. At mediocres putantur quæ eius ſemiſſem in menſes pendũt. Quæ verò non vltra centeſimæ trientem,aut quadrantem,aut ſextantem in menſes pariunt,ciuiles habentur & humanæ.

Lucri exploratio in tempore maiori. Quæſtio VIII.

MERCATOR ex aureis ſeptuaginta per menſes tres lucri fecit quinque: quantum lucri tredecim menſibus ex aureis ſeptuaginta obueniet? Duæ proportiones deprehẽduntur. altera de tribus mẽſibus ad menſes 13, altera de quinque lucrifactis ad numerum inueſtigatur. Nam ſicut tres menſes ſe habent ad menſes tredecim, ſic quinque lucrifacta ad numerum quæſitum. Et permutatim,ſicut tres mẽſes ad quinque lucrifacta ſe habẽt,ſic 13 menſes ad numerum inueſtigatum. Quare quatuor proportionalium regula duce,primo loco ſtatuentes 3,ſecundo 13,tertio 5,comperiemus aureos viginti vnum & duas tertias 13 menſibus lucri fieri.

Menſes	Menſes	Aurei	Aurei
3	13	5	21 $\frac{2}{3}$.

Temporis inueſtigatio in lucro maiori.
Quæſtio I X.

QVI PER mẽſes quatuor ex aureis nonaginta, lucri fecit quinque, ſcire cupit quanto tempore iidem aurei lucri centum reddẽt. Hæſitatio hæc proximæ ſimilis eſt, præterquam quòd hic de tempore, illic de lucro fit inueſtigatio. Simili igitur modo ſoluẽda eſt: quippe duæ proportiones apparent. Nam ſicut quinque aurei lucri facti ſe habent ad aureos centum lucri faciendos: ſic quatuor menſes quibus quinque aurei lucri accreuerunt, ad numerum mẽſiũ inueſtigatũ. Et permutatim, ſicut quinque aurei lucri facti ſe habẽt ad menſes quatuor: ſic 100 aurei lucri faciendi ad numerũ mẽſium, de quo quæſitum eſt. Primo igitur loco notatis 5, ſecundo 100, tertio 4, regula quatuor proportionalium aureos 100 ex 90 lucri fieri menſibus 80 manifeſtat. qui numerus menſium creat annos ſex & menſes octo.

Aurei	Aurei	Menſes	Menſes
5	100	4	80

Lucri inueſtigatio ex maiori pecunia ſecundum reſpectũ lucri ex ſumma minori. Quæſtio X.

MERCATOR quiſpiam tribus menſibus ex decem aureis lucri fecit quatuor: ſcire cupit ad eandem rationem ex ſexcentis aureis decem & octo mẽſibus, quot aurei lucri fieri poſſunt. Nullum hæſitationis genus frequẽtius quàm huiuſmodi eſt inter mercatores, dum ſecũ deliberant de quouis mercimonij genere, ſi pecunias ſuas in id impendant, quanto tẽpore quãtum lucri poterit acquiri. Ad hãc rem expedite diſcutiendam in primis illud fieri oportet quod faciẽdum eſt, quoties in duabus proportionibus cũ pecuniæ certæ diuerſitate temporis certi diuerſitas concurrit, vt pecuniæ quæque ſumma per ſuũ tempus multiplicetur, vnúſque ita numerus vim vtriuſque cõplexus producatur ex ambobus, qui deinde cũ lucro per ea parto comparetur. Quo fiet vt in ordinem proportiones ambæ redigi ſtatim poſſint, quẽadmodũ in proximis quæſtionibus diximus. Nã duas proportiones rem conſyderantes comperiemus, quantum alterius ambo extrema ſunt cognita, alterius verò alterum ſolum. Nam quæ proportio eſt inter decem aureos cũ ſuo tempore trium menſium copulatos, & aureos ſexcentos cũ ſuo tempore menſium decem & octo iunctos, cuius proportionis

ambo extrema ſunt cognita:eandem eſſe debere lucri quatuor aureorum noti ad lucrum illud quod ignoratũ inquirimus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter aureos decẽ connexos cum ſuo tempore trium menſium, & lucrum quatuor aureorum cognitũ: eadem deprehendetur inter ſexcentos aureos coniunctos cum ſuo tempore menſium decem & octo & lucrum illud quod veſtigamus. Facta itaque aureorum decem multiplicatione per ſuum tempus trium menſium, ſurgunt triginta. Rurſúſque ſi in ſexcẽtos aureos ducantur decem & octo, ſuorum menſium numerus, prodibunt decem millia & octingenta. Poſtea quatuor proportionaliũ regula nobis eam ſequentibus negotium explicabit, ſi primo loco triginta, ſecũdo decem millia & octingenta, tertio quatuor, quod lucrum nobis notum eſt, ponamus. Ita deprehendemus ex ſexcentis aureis menſibus decem & octo lucri fieri aureos mille quadringentos & quadraginta.

		Lucrum	Lucrum
30	10800	4	1440

Hic inueſtigatum eſt quantum accreſcet lucri.

Temporis inueſtigatio in lucro maiori ſecundum reſpectũ temporis in lucro minori. Quæſtio XI.

FREQVENTER etiam mercatores inuertũt huiuſmodi quæſtionem, vt de tempore ſit hæſitatio. veluti ſi quiſpiam qui tribus mẽſibus ex decẽ aureis lucri fecit quatuor, ſcire cupiat ad eandem rationem quot menſibus ex ſexcentis aureis, mille quadringentos & quadraginta lucri facere poteſt. In hac quæſtione lucrũ in vtraque portione certum, tempus verò in altera adhuc ignoratũ. Quare multiplicatio pecuniæ certæ per ignotum tempus fieri nequaquam poteſt, vt ambas proportiones ad quatuor proportionaliũ regulam ſemel applicare ſufficiat. Alia igitur via tentanda eſt. Et rem conſyderantibus in primis ad exemplũ lucri quatuor aureorũ, quod ex decẽ aureis menſibus tribus creuit, excutiendum videtur, quantum lucri aurei ſexcenti menſibus tribus pariẽt. Id quod facile diſcuti poteſt, ſi cogitemus duas hic proportiones reperiri: alterã de aureis decẽ ad ſexcentos: alteram de quatuor aureorum lucro ad lucrum illud quod exquirimus. Nam ſicut aurei decem ſe habent ad ſexcentos, ſic quatuor aureorum lucrum ad lucrum exquirẽdum. Et permutatim, ſicut aurei decem ſe habent ad lucrũ quatuor aureorum: ſic aurei ſexcenti ad lucrum inueſtigandũ. Itaque

primo loco poſitis 10, ſecundo 600, tertio 4: per quatuor proportionalium regulam comperiemus ex 600 aureis, menſibus tribus lucri fieri 240. Deinde poſtquam compertum eſt quantum lucri menſes tres ex aureis ſexcentis afferunt: continuo deprehendetur quot menſibus aurei mille quadringēti & quadraginta ex ſexcentis lucri fieri poſſunt. Nam quæ proportio eſt aureorum ducentorum & quadraginta qui tribus mēſibus lucri fiūt, ad aureos mille quadringentos & quadraginta: eadem erit temporis trimeſtris ad numerum menſium inueſtigandum. Et permutatim, ſicut ducenti & quadraginta aurei qui trium menſium ſunt lucrum, ſe habēt ad tres menſes: ſic aurei mille quadringenti & quadraginta ſe habebunt ad menſium numerum, de quo quæſitum eſt. Quamobrem primo loco poſitis 240, ſecundo 1440, tertio 3: è veſtigio quatuor proportionalium regula denuo repetita nos edocebit, aureos 1440 ex 600 lucri fieri menſibus decem & octo.

		Menſes	Menſes
240	1440	3	18

Itaque tempus hoc de quo quæſitum eſt, particulatim inueſtigādum erat, vt eius portione cognita facile exquireretur reliquum. Cætera id genus exempla ad eundem modū excuti poſſunt. Quo fit manifeſtum, quatuor proportionalium regulam, quoniam ſemel tentata non ſatiſfacit, bis nonnunquam adeundā eſſe, vt cuncta in lucem eruat.

Ponderis exploratio in panibus, quando pretium annonæ creſcit. Quæſtio XII.

QVANDO tritici modius nummis decē vēditur, primariæ notæ panis, qui nummi pretiū habeat, pēdebit vncias quadraginta tres. Secundum eam rationem, quanti ponderis erit panis vnius nummi, quando tritici modius tredecim nummis conſtat? Hic obſeruare oportet, vbique gentium receptam panificij legē eſſe, vt pro qua portione tritici pretium creſcit, pro ea panum vnius pretij pōdus minuatur. Sicut enim annonæ copia panibus eiuſdem pretij & magnitudinem & pondus auget, ſic contrà annonæ caritas ab eodem pretio & pōdus his & magnitudinem demit. Quocirca cum pro maioris pretij ratione diminutio ponderis ſit inueſtiganda, ea propter in proportionum comparatione, quod extremū vtriuſque maius eſt, præponi debet, vt quæſtio ſit de minori alterius extremo quod ignoratur. Cū autem altera proportio de tredecim nū-

mis ad nummos decem, ambo extrema nota habeat, eam præcedere oportet. Altera verò de quadraginta tribus vncijs ad numerum ponderis inquirendum, ſequi priorem debet. Nam in hoc quæſito quantus reperitur exceſſus nummorum tredecim vltra decem, tãtus erit quadraginta trium vnciarum exceſſus ſupra numerum põderis inueſtigandum, eadémque proportio. Et permutatim, ſicut 13 ſe habent ad 43, ſic decem ad numerum ponderis inquirendum ſe habere debent. Itaque ſi primam ſedem tredecim occupent, ſecundam decem, tertiam 43: quatuor proportionalium regula rem totam illuſtrabit. per quã deprehẽdemus quando tredecim nummis tritici modius vænit, vnius nummi panẽ vncias triginta tres & vnam tertiam pendêre.

Pretium	Pretium	Pondus	Pondus
13	10	43	$33\frac{1}{3}$

Ponderis exploratio in panibus, quãdo pretium annonæ decreſcit. Quæſtio XIII.

SI PANIS VNIVS nummi pendet vncias 43, quando tritici modius 10 nummis conſtat: quanti põderis ad eam rationẽ erit panis vnius nummi, ſi tritici modius nũmis ſeptem væneat? Hic quia tritici pretium eſt imminutum, iuxta panificij leges pondus panis augebitur. Quocirca qua proportione nummi 7 ſuperantur à 10, eadem 43 vnciæ ſuperabuntur à pondere panis inueſtigando. Et permutatim, ſicut 7 ſe habent ad 43: ſic 10 ad numerum ponderis inueſtigandum. Quare in proportione priore de 7 nummis ad nummos 10, extremum quod minus eſt præcedere: quod maius eſt, ſequi debet, vt poſterior proportio de panum pondere, deſinat in pondus maius. Ita digeſtis in ordinem proportionibus, per regulam quatuor proportionalium comperiemus vnius nummi panem pendere vncias 61 $\frac{3}{7}$ quando tritici modius ſeptẽ nũmis conſtat.

Pretium	Pretium	Pondus	Pondus.
7	10	43	$61\frac{3}{7}$

Lucri & damni regulæ.

PRIVS quàm ad alias quæſtiones progredimur, de lucro & dãno quaſdam regulas operæ pretium putamus adiungere. Et vt de lucro primum dicamus, Mercatores ad hunc modũ ſecum quærere ſolent, Si ceræ põdo centena aureis 12 quiſpiam emat, atque ea

deinde aureis 14 vendat: quantum lucri ex centenis accreſcet? Huiuſmodi quæſita ſic explicantur. Principio ſubducere oportet pretium quo res empta eſt, à pretio quo poſtea venditur: & numerus reſtans qui differentiã vtriuſque pretij continet, lucrum indicabit quod ex ſorte illa 12 obueniet, videlicet 2. Deinde ſi 12 quæ ſunt in ſorte, pariunt in lucrum 2, quantum lucri 100 reddent, per regulã de tribus notis quartum ignotum proferentibus pronum eſt excutere. ducentes enim 2 in 100, procreabimus 200. quæ per 12 ſecãtes, relinquemus in ſectionis numero $16\frac{2}{3}$. tantum lucri ex centenis accreſcet. Nam quæ proportio eſt inter ſortem 12 & ſortem 100, eadem eſſe debet inter lucrum quod ex 12 creuit, & lucrum quod ex 100 obuenire debet. Et permutatim, quæ proportio eſt inter ſortem 12, & lucrum 2, eadem inter ſortem 100 & eius lucrum quod inueſtigamus, eſſe debet. Similiter de denis, vicenis, tricenis, quadragenis, quinquagenis, vel millenis, quæri poſſet: ſed mercatorius ſupputandi mos maxime in centenis lucra & damna conſyderat. atque ideo de centenis exempla damus. In his autem mercatorijs regulis, quas nunc interſeremus, porportionum comparationem permutatim ſolum ponemus, mercatorum more: quãdoquidem per hanc cuiuis ſtudioſo recta earum comparatio ſeſe ſimul aperiet. Calculum recte cõfectum eſſe probabis, ſi proportionum ordinem cõuertas hoc modo, Si 100 quæ ſunt in ſorte lucri, faciũt $16\frac{2}{3}$: 12 in ſortẽ collata lucrum reddent 2. Quòd ſi plus aut minus calculus afferat, error interuenit. Vel ſi cui magis placet, negocium ad regulam ſic applicabit, Si de 12 quæ ſunt in ſorte, fiunt 14 in ſortem & lucrum, quid ex 100 in ſortẽ datis ea ratione proueniet? ſequentes regulam deprehendemus $116\frac{2}{3}$ in ſortem & lucrum accreſcere: à quibus ſi demus 100 quæ ſortem faciunt, ſuperſunt $16\frac{2}{3}$. quæ lucrum ex centenis indicant. Tui arbitrij lector, eſto, vtram viam magis libeat ſequi. nam mercatores ipſi, alius hãc alius illam capeſſunt.

AD DAMNVM cognoſcendũ, id quod de lucro iam admonuimus, ſtudioſis ſuffecerit. nihil enim aliud intereſt, niſi quòd ſicut venditio ſuperans emptionis pretium, lucrum exuberare facit: ſic è cõuerſo venditio minoris facta ſortem vel diminuit, vel exhaurit. verũtamen exemplum de eo quoque dabimus, Quando libra croci empta eſt aureis 3, venditáque 2: quæ iactura ex cẽtenis erit? Pretium quo res minoris vendita eſt, ab emptionis pretio quo pluris eſt empta, ſubtrahe. & ſupereſt 1, quod damnũ de tribus indicat.

Deinde ſi de 3 vnum perit, quantum detrimenti 100 afferent? per regulam datam exquire: reperies $33\frac{1}{3}$. Vel ſi magis libet alteram viam tentare, ſic potes, Si de 3 ſola 2 ſuperſunt, quid de 100 relinquetur? ducantur 2 in 100, fiunt 200: quæ ſi per 3 ſeces, exeunt $66\frac{2}{3}$ ea de 100 manent. differentia itaque inter $66\frac{2}{3}$, & 100 quæ eſt $33\frac{1}{3}$, venit in detrimentum.

Per lucrum notum ſortis ignotæ exquiſitio.

SAEPE mercatores ad nundinas ituri ſecum ad hunc modum ſupputare ſolent, Quanti pondo centena cuiuſpiam mercis, puta æris, æruginis, emenda ſunt, vt aureis 13 poſtea vendita ex centenis dena in lucrum pariant? Huiuſmodi quæſita expedies, ſi ſic tecum conſyderes, Qui ex centenis dena lucri vult facere, is 100 augere vſque ad 110 ſtudet: id quod ex pretio 13 efficere molitur. Itaque in illis 13, & ſors & lucrum latet: alioqui niſi ineſſet lucrum, dena ex centenis non lucrifierent. Ea propter cum per venditionem 13 aureis factam, lucrum ex centenis deſtinatum ſit acquiſitum: ſors quæ latet in 13, per regulam de tribus notis quartũ ignotum proferentibus ſtatim ſic patefiet, Si 110 quæ ſortem & lucrum capiunt, prodeunt de ſorte 100: de qua ſorte naſcentur 13, quæ ſortem & lucrum tenent? Multiplicare oportet 100 in 13, & producentur 1300: quæ ſi per 110 ſecentur, numerus ſectionis $11\frac{9}{11}$ habebit: qui numerus ſortem illorum 13 demonſtrat. Atque ideo tanti emenda eſſent æris, æruginis pondo 100, vt poſtea 13 aureis vendita lucrum proportione denorũ ad centena reddant. Si ſpecimen capere libet an recte ſit ſupputatum, proportionum ordinem conuerte hoc modo, Si de $11\frac{9}{11}$ quæ ſunt in mera ſorte, ſurgũt 13 ſors & lucrum: quid de 100 mera ſorte prodibit? tenta per regulam, & 110 inuenies: à quibus dempta ſorte 100, lucrũ 10 ſupereſt. Sin plus aut minus redeat, erratũ eſt. Aliud exemplum, Quanti lanæ mille pondo ſunt empta, quæ poſtea aureis 50 vendita lucrum proportione duodenorum ad centena pariunt? ad regulam datam ſic applicabis, Si 112 ante lucrum partum erant 100, quid ſecundũ eam rationem 50 prius erant, cum quibus partum eſt lucrum? ſupputatio ſecundum regulam facta te docebit fuiſſe $44\frac{72}{112}$, quæ ſunt $\frac{9}{14}$.

Aliud exemplum, Quanti cõſtitit libra croci, quãdo vncia nummis 9 vendita lucrum affert proportione denorũ ad centena? Vnciæ ſortem ſic deprehendes, Si 100 antequam acceſſit lucrum, erant 100: quid erant 9? inuenies fuiſſe $8\frac{2}{11}$. tot nummis vncia conſtitit.

Deinde vt libræ pretium excutias, multiplica vnciæ pretium $8\frac{2}{11}$ in 12, quòd tot ſint vnciæ in libra, & producuntur $98\frac{2}{11}$. tot nummis libra croci prius empta erat.

Per detrimentum notum ſortis ignotæ exquiſitio.

QVI gemmam emerat, vendidit eam poſtea aureis 100: & dum pecuniæ ſuæ rationem init, comperit ſe perdidiſſe 10 ex 100: quāti ab initio ſtetit gēma? Sic cōſyderare oportet, Qui 10 de 100 perdit, 100 ad 90 minuit: atque ideo ad inueſtigandā ſortem illorū 100, ad hunc modum cogitabit, Si 90 ante detrimentum erant 100, quid ſecundum eam rationem antè erant illa 100, ex quibus iactura facta eſt? ducantur 100 in 100, & ſurgent 10000: quæ ſecta per 90, reddunt 111 $\frac{1}{9}$: tanti gemma ab initio conſtitit. Verſo in contrarium proportionum ordine, capere experimentum licet an recte ſit ſupputatum, ad hunc modum, Si de 111 $\frac{1}{9}$ ſola 100 ſuperſunt, quid de 100 relinquetur? ſi regulam ſequare, deprehendes 90. ſi plus aut minus exit, error manifeſtus eſt.

ALIA etiam via per lucrum aut damnum ad ſortis partes redigendum, ſors ipſa ignota inueſtigari poteſt. Puta, ſi quiſpiā vendens nummis 20, de 100 lucrifaciat 10, & hæſitetur quanta ſit ſors: ad hunc modum per compendium res expedietur, Animaduertere oportet quota ſortis pars ſit lucrum: id quod ſtatim fit manifeſtum, ſi lucrum 10 per ſortem 100 diuiſum in minutias ſoluatur eo modo quo numeri minoris per maiorem admonuimus ſectionem fieri: ſic naſcentur $\frac{10}{100}$: quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{10}$: itaque qui ex 100 lucratur 10, decimā ſortis partem lucrifacit: quæ pars decima addita ad ſortem fit vndecima totius ſummæ. Atque ideo qui de lucro & ſorte $\frac{1}{11}$ capit, lucrum habet illius ſummæ: quod quādo ab ea ſubductum erit, ſola ſors reſtabit. Itaque de 20 ſumito $\frac{1}{11}$, & inuenies $1\frac{9}{11}$: tantulum ineſt lucri in exigua hac ſumma 20. Id autem ſi à 20 ſubducatur, reſtabūt pro ſorte $18\frac{2}{11}$. Ea ſors eſt illorum 20. Rem ita habere probabis, ſi proportionum ordinem conuertas hoc modo, Si de $18\frac{2}{11}$ fiunt 20, quid accreſcet de 100 ſortē ta, & inuenies 110: ſubducito pro ſorte 100, reſtant pro lucro 10. Calculus itaque non errauit.

EADEM via per damnum ad ſortis partes redigendum, ſors ipſa poteſt excuti. Veluti ſi exemplo verſo, fingamus eum qui nummis 20 vendit, dena ex cētenis perdere. nam dānum 10 per ſortem 100 diuiſum profert $\frac{10}{100}$, quæ faciunt $\frac{1}{10}$. Illud itaque conſyderare

oportet, Qui perdit 10 ex 100, perdit de ſua ſorte $\frac{1}{10}$. Quo fit vt ſaluæ ſint ei reſtantes $\frac{9}{10}$: de quibus partibus ſi ſumas $\frac{1}{9}$, atque eam ad omnes partes relictas addas, inſtaurabis ſummam quæ fuit ante damnũ, & ſortem habebis quæſitã. Atque ideo in exemplo dato, ſi nũmis 20 vendens dena de centenis perdit, ea ratione vicena illa $\frac{9}{10}$ totius ſortis efficiũt. Quocirca ſi nonã partem de 20 ſumas, videlicet $2\frac{2}{9}$: atque eam ad 20 addas, fient $22\frac{2}{9}$: quæ ſumma ſortis ante iacturam erat. Nona autem illa pars $2\frac{2}{9}$ decima eſt totius ſortis, partémque eam addita inſtaurat, quæ de ſorte perierat.

Lucri ratio, ſi minoris quippiam fuiſſet emptum.

GLASTI emptor põdo millena certo pretio mercatus eſt: quæ ſi binis aureis minoris emiſſet, atque ea poſtea aureis duodenis vẽdidiſſet, ex cetenis dena feciſſet lucri: quæro quanti ab initio pondo glaſti millena ſteterunt? Huiuſmodi quæſita ſic expedies, Sortem illorũ 12 inueſtigare oportet eo modo quẽ dedimus, Si 110 érant 100 ante lucrum, quid ſecundum eam rationem ante lucrum adiunctum erant 12? ducantur 12 in 100, producũtur 1200: quæ ſecta per 110, reddunt $10\frac{10}{11}$. Ea fuiſſet ſors, ſi nihil aliud interueniſſet. Verũ quia adiectũ eſt, ſi duobus aureis minoris emiſſet, & 12 vendidiſſet, tum lucrũ accedere debuiſſe porportione denorũ ad centena: liquet ex hoc eũ pluris $10\frac{10}{11}$ emiſſe. Atque ideo 2 ad $10\frac{10}{11}$ addenda ſunt, vt fiant $12\frac{10}{11}$. tot aureis initio glaſti pondo 1000 conſtiterunt. Ex quo fit manifeſtum, ſi minoris duobus aureis emiſſet, danda fuiſſe $10\frac{10}{11}$: quæ ſors ea eſt quæ per venditionem ad 12 creſcens, dena ex centenis lucrifacit.

Damni ratio, ſi pluris quippiam fuiſſet emptum.

FRVMENTI emptor modios quaternos certo pretio emit, qui ſi pluris nummis quaternis quàm ſunt empti, conſtitiſſent, & vẽditi fuiſſent nũmis tricenis ſenis, dena de centenis fuiſſent perdita: quanti igitur cõſtiterunt modij quaterni? Principio ſicut proxime in lucro factum eſt, ſortẽ illorum 36 erues, hoc modo tecum cõſyderans, Si 110 erant 100, quid ſecundum eam rationem ante erant 36? ducantur 36 in 100, & fient 3600: quæ deinde ſecentur per 110, & prodeunt $32\frac{8}{11}$. tanti emi debuiſſent modij quaterni, vt venditione facta, nummis 36 dena ex centenis lucri fierent. Verum hic perdita ſunt 10 ex 100: atque ideo ſicut in iactura antè docuimus, ſic conſyderabimus, Si 90 ante iacturam fuerunt 100,

quid ſecundũ eam rationem antè fuerunt 36? ducantur 36 in 100, & ſurgent 3600 : quæ ſecta per 90, reddunt 40. tanti emi debuerunt, vt venditi nummis 36 damnum afferrent, detrahens dena ex centenis. Cæterum quia dictum eſt, ſi 4 nummi amplius ad pretiũ acceſſiſſent, tum iacturam illam denorum ex centenis ex venditione facta nummis 36 fuiſſe ſecuturam: 4 nummi à 40 demẽdi ſunt, quòd tanto minoris ſunt empti. ſic reſtant 36: quo pretio quaterni frumenti modij ab initio ſunt empti.

Lucri ratio, ſi pretium mutetur.

QVI SALIS modios ſingulos ſenis nummis vendit, octona ex centenis lucratur: quæri poteſt, ſi is mutato pretio, nummis octonis vendat, quantum lucri ex centenis acquiret? Multi in huiuſmodi quæſitis hallucinãtur, dum ſic proportiones comparant, Si 6 dant 8: quid dabunt 8? ducentes nanque 8 in 8, & productum per 6 ſecantes deprehendũt 10 $\frac{2}{3}$, quod lucrum ex centenis obuenire putant, ſi ſingulorum ſalis modiorum pretium à nummis 6 ad 8 mutetur. Hi toto errant cælo : nam 6 illa quæ iſti velut ſortẽ ponunt, & lucrum & ſortem continẽt. Itaque vbicunque in ſimilibus de lucro aut damno quæritur, primum ſors inuenienda eſt, quæ lucrum & damnum peperit: igitur ſortem & lucrum, quæ in ſex latent, ſors & lucrum, quæ in centenis nota ſunt, proferent in lucem, ſicut iam docuimus, hoc modo, Si 108 antequam acceſſit lucrum, erant 100, quid ſecundum eam rationem ante lucrum erant 6? ducantur 6 in 100 & fient 600: quæ per 108 ſecta in numero partitionis educunt 5 $\frac{5}{9}$. tãtum complecti debet ſors illorũ 6, vt poſtea ſex nummis facta venditio octona ex centenis lucri faciat. Iam verò in hoc themate, qui nummis 6 vẽdidit mutato pretio, nummis octonis vendere in animo habet, & ſcire cupit quantum lucri ex cẽtenis accreſcet. Id quod facile exquiri poteſt, ſi proportiones ſic formentur, Si 5 $\frac{5}{9}$, quæ ſunt ſors, pariunt 8 in ſortem & lucrum: quid 100 in ſortem collata dabunt? Scies è veſtigio, ſi 8 in 100 ducas, numerúmque productum diuidas per 5 $\frac{5}{9}$: quo fiet vt in numero ſectionis prodeant 144. tantum ſors illa 100 afferet in ſortem & lucrum. Igitur ſi ſortem 100 ab ea ſumma ſubducas, 44 pro lucro reſtant. tantum lucri ex centenis accreſcet, ſi ſinguli ſalis modij nummis 8 vendantur, qui antè 6 ſunt vænundati.

VEL SI mauis alia via rem ſtatim expedire, vt ſortem non exquiras, id fiet ad hunc modum, Adde ad ipſa 100, lucrum ex his ac-

creſcens:ſummámque eam diuide per prius pretium quod lucrum illud peperit.Id autem quod in numero ſectionis prodibit,multiplica in poſterius illud pretium in quod fit cõmutatio.Ita numerus ex hoc productus,& lucrum de 100 natũ,& ſortem ipſam 100 complectetur:à quo lucro ſi ſortem 100 demas,lucrum de centenis ex nouo pretio obueniens reſtabit. Quæ via nunquam fallet. Puta in exemplo iam dato, vbi venditio ſenis nummis facta ex centenis octona in lucrum intulit: lucrum 8 ad ſortem 100 adde,fient 108.Eam ſummã diuide per prius pretium 6,quo lucrum illud acquiſitum eſt: ſic in numero ſectionis 18 prodeunt: quæ deinde in poſterius illud pretium 8,in quod fit commutatio, ducenda ſunt: ita producentur 144,quæ & lucrum & ſortem centenorũ capiunt: à quibus ſi 100 pro ſorte demas,reſtant pro lucro 44.tantum lucri de centenis accreſcet, ſi pretium à nummis ſenis ad octonos mutetur.Siue autem de centenis,ſiue de alio numero,puta quinquagenis,millenis,aut quouis alio,certũ lucrum quæratur,regula hæc inuariata manet:vim autem ſuam capit à multiplicatione & diuiſione,quæ à quatuor proportionalium regula ſuprà data,& ab vnitatis natura dependent.Porrò in diuiſione,ſicut vnitas ſe habet ad diuiſorem,ſic ſectionis numerus ad numerum diuidendum.Et permutatim,ſicut vnitas ſe habet ad ſectionis numerum, ſic diuiſor ad diuidendum.Similiter etiam fit in multiplicatione:nam ſicut vnitas ſe habet ad multiplicatorem,ſic multiplicandus ad numerum producendũ.Et permutatim,ſicut vnitas ſe habet ad multiplicandum,ſic multiplicator ad numerum producẽdum. Igitur eſto 6 habeant 1 in ſortem,ea ratione 108 haberent 18: id quod ſic exquires, Si 6 in ſorte & lucro prodeãt(fingamus)de 1,de quo naſcentur 108 quæ ſunt in ſorte & lucro:ducatur 1 in 108:& idem numerus producetur.Is deinde diuidatur per 6:& numerus ſectionis 18 proferet, quæ ſecundum eam rationem ſors eſſe deberent illorum 108. Iam verò pretio mutato, ſi ſcire voles quantum reddent 18,ſic inueſtigabis, Si de vno fiunt 8,quot de 18 fient:multiplicentur 8 in 18, & producentur 144: quæ ſortem & lucrum centenorum tenebunt.

Damni ratio,ſi pretium mutetur.

DAMNI ratio per eandem regulam ad eundem modum excutietur,præterquam quòd ſicut lucrum additur ſorti, ſic iactura de ſorte ſubducitur,& numerus reſtans per prius pretium, quod de-

trimẽtum attulit,ſecatur. quod autem in numero partitionis reperietur, ducere oportet in pretium illud in quod fit cõmutatio: ſic numerus productus & ſortem indicabit & damnũ,ſiue de centenis quæratur,ſiue de millenis,ſiue de quouis alio numero iacturam terminante. Exempli gratia,qui 6 nummis vẽdit, duodena de centenis perdit:quid iacturæ ex centenis ſuſtinebit,ſi pretio diminuto 4 nummis vendat? de 100 ſubduci debent 12, & reſtabũt 88: quæ ſecentur per prius illud pretium 6,quod iacturam peperit, & prodibunt in ſectionis numero $14\frac{2}{3}$. Ea autem deinde multiplicentur in minus pretium 4 in quod fit cõmutatio:& $58\frac{2}{3}$ ſurgẽt, quæ ſorte & iacturam centenorum demõſtrabunt. quot itaque ab eo numero vſque ad 100 deſunt, totidem de centenis in iacturam veniunt:ea autem ſunt $41\frac{1}{3}$. Vel ſi per exquiſitionem ſortis illorum 6 magis id ſcire libet:ſic tecum conſyderans rem ſtatim explicabis, Qui nummis 6 vendendo de 100 perdit 12, is 100 ad 88 minuit:quæ iactura naſcitur ex nummis illis 6. Sic igitur ratiocinare,Si 88 ante iacturam erant 100,quid ſecundum eam rationẽ antẽ erant 6 quæ damnum attulerunt? tenta per datam regulam, & inuenies $6\frac{9}{11}$. ea ſors erat illorũ 6.Idque ita eſſe probabis, ſi proportionum conuertas ordinem hoc modo, Si $6\frac{9}{11}$ minuuntur ad 6,quantum ſecundum eam rationem decreſcent 100? experire per regulam,& 88 relicta deprehendes.Iam verò mutato pretio,ſi ſors illa $6\frac{9}{11}$ minuatur ad 4,quid iacturæ ex 100 erit? data regula ẽ veſtigio aperiet.Nam ſi 4 in 100 ducantur,fient 400: quæ ſi per $6\frac{9}{11}$ ſecentur,numerus partitionis $58\frac{2}{3}$ habebit.Quod autẽ ſupra eum numerum vſque ad 100 deeſt,in iacturã (vti diximus)venit: vtraque igitur via rem eodem perducit.

Quomodo pretium ſtatuatur ad lucrum quoduis parandum.

FREQVENTER etiam mercatores in merce aliqua,pondere, numero aut menſura vendi ſolita; poſt complures expenſas terra marique ſupra emptionis pretium factas,in vectigalia,naulũ, vecturam,miniſtrorum victum,cæteráque id genus, certum ſibi lucrum de quouis põdere, numero,aut mẽſura deſtinant: ſecúmque deliberant,quodnam pretium ſtatuant in ſingula pondera,numeros aut menſuras,vt lucrũ illud accreſcat. Id quod fiet ad eum modum, quem hoc exemplo monſtrabimus, Piperis pondo millena in Luſitania nummorũ 10000 ſunt empta: próque his vectigal illic penſitatum nummi 1000. naulum deinde illinc in Britannias

conſtitit 300. Ibi rurſus aliud vectigal exactũ 500. Vectura deinde terra facta nummis ſtetit 200. Miniſtri in eam negotiationem miſſi impenſa 2000. Mercator aducta merce, de ſingulis piperis libris ſupra omnes impenſas nummos 4 lucrifacere deſtinat. Cæterum hæſitat, quonam pretio piperis libram vendat, vt lucrum illud accedat. Rem ſic expediemus: pretium emptionis, vectigal, naulum, iterum vectigal, vecturam terra factam, miniſtri impẽſam, omnia in vnam ſummam colligerę oportet, & ſurgent 14000: quibus etiamnum lucrum nummorum 4 deſtinatũ in libras ſingulas debemus addere, videlicet nummos 4000, ſic creſcunt 18000. Quam ſummam in vniuerſum mercator & pro ſorte & pro lucro totius negotiationis ſibi reddi cupit. Atque ideò quatuor proportionalium regula, quam de tribus notis quartum ignotum proferentibus ſuprà dedimus, è veſtigio pretiũ vnius libræ patefaciet. Nam ſicut vniuerſæ piperis libræ aductæ ſe habent ad totam illam ſummam pretium atque lucrum omnium complectẽtem, ſic vna piperis libra ad ſuum pretium & ſuum lucrum ſe habere debet. Quocirca ſi 1 ducatur in 18000, idem numerus producetur: qui ſi per numerum vniuerſarum piperis librarum videlicet 1000 ſecetur, numerus ſectionis pretium vnius libræ nummos 18 continebit. Ad eundem modum pretium & lucrum ſtatuere licet in his, quæ numero aut menſura vendi conſueuerunt.

Collatio in iactu mercium facto ob nauem in tempeſtate ſeruandam. Quæſtio XIIII.

SEX MERCATORES emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces conſtiterunt aureis viginti quinque, Secundi quadraginta, Tertij quinquaginta ſex, Quarti ſexaginta quatuor, Quinti ſeptuaginta quinque, Sexti centum. Graui deinde tempeſtate inter nauigandum orta, cum nauis onere nimio depreſſa crebris fluctibus penè obrueretur, nautæ ſaluti ſuæ conſulentes, cauſa leuãdæ nauis eijciunt in mare grauiſſimas quaſque merces, quæ pro cẽtum & viginti aureis alioqui valebant. Quo iactu factũ eſt, vt ſeruata nauis reliquum onus in portum deſtinatum adueheret. Mercatores, quorum erant eiectæ merces poſtulant, vt cæteri quorum bona ſeruata ſunt, iacturam cõmuniter ſuſtineant. Id quod illis omnibus æquum viſum eſt. Cæterum ambigunt quonã modo pro rata cuiuſque bonorũ portione collatio ea fieri debeat. Hãc hæſitationẽ explicaturis ſtatim nobis occurrũt duæ proportiones: altera

de mercium omniũ in nauem impoſitarũ ſumma ad cuiuſq; merces impoſitas. altera quæ ſecundũ illam adaptari debet, de cõmuni omniũ iactura ad cuiuſque iacturã ſuſtinendã. Nam ſicut omniũ merces impoſitæ ad cuiuſque merces ſe habent, ita omniũ iactura ad cuiuſque iacturã ſe habere debet. Et permutatim, ſicut omniũ merces impoſitæ ſe habent ad cõmunem omniũ iacturam: ita cuiuſque impoſitæ merces ad iacturã cuiuſque. Quocirca hæſitatio hæc per quatuor proportionaliũ regulã ſic facile explicatur, vt primo loco omniũ mercium æſtimationẽ ſimul additã ſtatuamus. Secundo loco vniuſcuiuſque merciũ æſtimationẽ ſeparatim aliã ſub alia notatã. Tertio loco cõmunem iacturam, ad hunc modum,

	25		Primus	8 & $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$
	40		Secũdus	13 & $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$
	56		Tertius	18 & $\frac{240}{360}$ quæ faciunt $\frac{2}{3}$
360	64	120	Quartus	21 & $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$
	75		Quintus	25
	100		Sextus	33 & $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$

Deinde ſi regulã ſequamur, deprehendemus primũ mercatorẽ 8 & $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$, conferre debere. Secundum 13 & $\frac{120}{360}$: quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Tertium 18 & $\frac{240}{360}$, quæ faciunt $\frac{2}{3}$. Quartum 21 & $\frac{120}{360}$, quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Quintum 25. Sextum 33 & $\frac{120}{360}$, quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Quòd ſi ſcire cupis num calculus errauit, ſingulorũ collationes ſimul adde: quæ ſi vniuerſæ collectæ reſpondent communi iacturæ, recte ſupputatum eſt, alioqui error interuenit.

Bonorum inter creditores diuiſio. Quæſtio XV.

SI CVIVSQVAM, qui ſoluendo nõ eſt, bona inter multos creditores pro cuiuſque debiti rata portione diuidi ideo debẽt, vel quod is foro cedat, vel quòd ſolũ vertat, vel quòd poſt mortẽ eius propter æs alienũ non adeatur hæreditas: ad eundẽ modum, quẽadmodum in iactu mercium de collatione faciẽda diximus, partitio fieri debet: cuius rei, vt exemplũ demus, Eſto, creditores octo fuerint, quibus debẽtur mille, primo quindecim, ſecũdo vigintiqua-

tuor, tertio triginta duo, quarto quinquaginta quatuor, quinto ſexaginta, ſexto ſeptuaginta quinque, ſeptimo octoginta ſex, octauo centũ: bonáque debitoris, quæ inter eos ſunt diſtrahenda, non tranſcẽdant centũ & quinquaginta. Rem cõſyderãtes, duas proportiones ſtatim deprehẽdemus: vnã de coaceruatis debitis omnibus, quæ debẽtur creditoribus vniuerſis, ad id quod cuique debetur: alteram de vniuerſis debitoris bonis ad eã portionẽ quã quiſque creditor habiturus eſt. Nã ſicut coaceruata debita, quæ debẽtur vniuerſis, ſe habẽt ad illud debitũ quod vnicuique debetur, ſic vniuerſa debitoris bona ad eam bonorũ partem quã quiſque creditor habiturus eſt, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut coaceruata debita quæ debentur vniuerſis, ſe habẽt ad vniuerſa debitoris bona, ſic illud debitũ quod cuique debetur, ad eam bonorũ portionem quã quiſque creditor habiturus eſt. Quare quatuor proportionalium regula rem reddet expeditam, ſi primo loco omnia debita ſimul addita, quæ creditoribus vniuerſis debẽtur, ponamus. Secũdo loco illud debitũ, quod cuique debetur, aliud ſub alio ſeorſum annotatũ. Tertio loco vniuerſorũ debitoris bonorũ ſummã. Deinde faciẽtes id quod iubet regula, cõperiemus primo creditori obuẽtura quinque & $\frac{20}{446}$: Secũdo, octo & $\frac{32}{446}$. Tertio, decem & $\frac{340}{446}$. Quarto, decem & octo $\frac{72}{446}$. Quinto, viginti & $\frac{80}{446}$. Sexto, vigintiquinque & $\frac{100}{446}$. Septimo, vigintiocto & $\frac{412}{446}$. Octauo, triginta tria & $\frac{282}{446}$. Certũ ſpecimen erit nihil erraſſe calculũ, ſi partes cuique obueniẽtes ſimul additæ reſpondeant vniuerſis debitoris relictis bonis.

	15		Primus 5 $\frac{20}{44}$
	24		Secũdus 8 $\frac{32}{446}$
	32		Tertius 10 $\frac{340}{446}$
	54		Quartus 18 $\frac{72}{446}$
446	60	150	Quintus 20 $\frac{80}{446}$
	75		Sextus 25 $\frac{100}{446}$
	86		Septimus 28 $\frac{412}{446}$
	100		Octauus 33 $\frac{282}{446}$

Poſthumi hæredis inſtitutio. Quæſtio XVI.

MORITVRVS quiſpiam, cui grauida erat vxor, & mille aureorum hæreditas, ſic teſtamentum condidit, Si vxor mea filium pariet, is ex beſſe mihi hæres eſto: vxor autem ex triente. Sin vxor mea pariet filiam, vxor ex beſſe mihi hæres eſto, filia verò ex triente. Vxor deinde geminos maſculum & fœminam vno partu enixa eſt. ambigitur, quonā modo diuidenda ſit hæreditas, vt defuncti voluntas non infringatur. Huiuſmodi hæſitationem altius conſyderantes in primis deprehendimus teſtatoris voluntatem eſſe, vt filius altero tanto amplius habeat, quàm vxor: itidémque vxor altero tanto amplius, quàm filia. Itaque cū filij pars ad portionē matris dupla eſſe debeat, quòd is duas hæreditatis partes, mater tertiam ſit habitura: matríſque pars item ad portionem filiæ, quòd ea duas partes cōſequutura ſit, & filia tertiā: eo fiet vt pars filij ad filiæ portionē quadrupla ſit futura. Quāobrem numerus aliquis exquirēdus eſt, qui ſimplū, duplum, & dupli duplū, quod quadruplū ad ſimplum eſt, habeat: vt in totidem partes diuidi poſſit hæreditas. Minimus autem numerus qui partes eas habeat, capiēdus eſt, quo facilior ſit ſupputatio. Is autem eſt ſeptenarius: nam vnum duplicatum profert duo: eáque iterū duplicata, quatuor: quæ cuncta ſimul addita faciunt ſeptē. Et quoniam mille aurei in ſeptem partes diuidendi ſunt, quarum quatuor filius habere debet, duàs mater, vnam filia: quot aurei cuique obueniēt, ſtatim excutiemus, ſi animaduertamus, quæ proportio eſt omnium partium ſimul additarum, hoc eſt ſeptenarij numeri ad cuiuſque portionem, eandem mille aureorum eſſe debere ad eum numerum qui cuique obueniet. Et permutatim, quæ omnium partium ſimul additarū proportio eſt ad mille aureos, eandem eſſe portionis cuiuſque ad numerum aureorū inueſtigandum. Ad regulam igitur quatuor proportionalium quæſitum applicantes, è veſtigio rem totam explicabimus, ſi primo loco, omnium partium numerū ſtatuamus, Secundo cuiuſque partem, aliam ſub alia notatam, Tertio loco mille aureos, quæ tota eſt hæreditas, ad hunc modum,

	4		Portio filij	$571\frac{3}{7}$
7	2	1000	Portio vxoris	$285\frac{5}{7}$
	1		Portio filiæ	$142\frac{6}{7}$

Deinde regulam ſequentes inuenicmus filij partem capere 571 & $\frac{3}{7}$. Matris 285 & $\frac{5}{7}$. Filiæ verò 142 & $\frac{6}{7}$. Specimen certum erit nihil erratum eſſe, ſi omnium partes ſimul additæ toti hæreditati reſpondeant.

QVÒD SI, vxor vno partu tres filios & duas filias æderet (id quod in AEgypto eſt frequens, vt mulieres quinquegeminos pariant) ad eandẽ rationẽ partitio fieri deberet, vt quilibet filius ad portionẽ matris duplum haberet, itidémque mater ad portionem cuiuſque filiæ. Quocirca numerus capiẽdus eſſet qui bina ſimpla, bina & ſimpli duplũ, atque ſimpli terna quadrupla haberet. Minimum autẽ numerum, qui bina ſimpla, & ſimpli duplũ habeat, cõperies quatuor: quíque terna quadrupla capiat, duodecim. ea ſimul addita fiunt ſexdecim: in quot partes hæreditas eſſet diuidenda, vt ex his quilibet filius quaternas, mater duas, filiæ vnicas accipiant. cætera ſecundum regulam quatuor proportionalium expediãtur.

Hæredum inſtitutio in partibus deſignatis. Quæſtio XVII.

ANIMAM agens quiſpiam, cui quinque erant filij, & trium millium aureorum hæreditas, huiuſmodi teſtamentum fecit, Primus filius meus natu maximus ex ſemiſſe mihi hæres eſto, Secundus natu proximus ex triente, Tertius ex quadrante, Quartus ex quinta parte, Quintus ex ſextante. Ambigitur quonam modo diuidẽda ſit hæreditas. Nam ſi teſtatoris verba ipſa ſequemur, vt primus filius hæreditatis dimidium, mille & quingentos aureos: ſecundus tertiam partem, mille aureos accipiat: tunc tertius integram quartam, ſeptingentos & quinquaginta aureos conſequi nequaquam poterit, cum ſoli ſuperſint quingenti. quartus autem filius, cui debetur pars quinta: & quintus, cui ſexta, nihil omnino habituri ſunt. Igitur cũ filij partes illas hæreditatis à patre deſignatas conſequi integras non poſſint, aliæ partes minores inueſtigandæ ſunt, quæ deſignatis illis pro portione reſpondeant, vt ſingulis filijs ſatiſfiat. Principio ergo exquirẽdæ ſunt partes deſignatæ, quæ facile inueniuntur ſi relictam ſummam per ſingulos ſeorſum denominatores diuidas. Ita cuiuſque ſectionis numerus partem per denominatorem à patre deſignatam continebit. Quo fiet vt dimidium inueniamus, aureos mille & quingentos: tertiam partem, aureos mille: quartam, ſeptingentos & quinquaginta: quintam, ſexingentos: ſextam, quingentos: qui numeri ſeorſum alius ſub alio debent annotari, vt eorum proportione alij numeri minores

inueſtigentur ex ſumma trium millium in hæreditate relicta. Hos autem numeros ſi filij haberent, ipſis ſuo cuiuſque voto ſatiſfactũ eſſet, nec amplius petere ex hoc patris teſtamento poſſent. Numeri verò hi collecti in vniuerſum, faciunt quatuor millia trecenta quinquaginta: qui numerus partes à patre deſignatas vniuerſas habet. Veruntamen quia hæreditas relicta ſumma minori clauditur, nempe trium millium: videndum quonam modo ſecũdum teſtatoris voluntatem facienda ſit partitio. Qua in re ſi poſt iam cognitas partes deſignatas penitius hæſitationẽ ſcrutemur, proportiones duas comperiemus: vnam de ſimul additis partibus vniuerſis deſignatis ad cuiuſque filij partem à patre deſignatam: alteram de vniuerſa relicta hæreditate ad illam eius partem inueſtigandam, quam quiſque filius pro partis deſignatæ portione accepturus eſt, quæ ſecũdum illam priorem formari debet. Etenim quæ proportio eſt inter vniuerſas partes deſignatas ſimul additas & cuiuſque filij partem à patre deſignatam, eadem inter vniuerſam relictam hæreditatem & illam eius partem exquirendam, quam quiſque filius pro partis deſignatæ portione habiturus eſt, exiſtere debet. Vel ſi libet permutatim ea comparare, Sicut vniuerſæ partes deſignatæ ſimul additæ ſe habẽt ad vniuerſam relictam hæreditatem, ſic cuiuſque filij pars à patre deſignata ad illam hæreditatis partem exquirendam, quam quiſque filius pro partis deſignatæ portione accepturus eſt, ſe habere debet. Poſtquã igitur primo loco partes vniuerſæ deſignatæ ſimul additæ ſunt notatæ, Secundo cuiuſque filij partes, quas pater deſignauit, alia ſub alia ſeorſum, Tertio relictæ hæreditatis ſumma: continuo quatuor proportionalium regula rem inuolutam explicat: ex qua deprehendes, primo filio obuenire $1034\frac{2100}{4350}$. Secundo $689\frac{2850}{4350}$. Tertio $517\frac{1050}{4350}$. Quarto $413\frac{3450}{4350}$. Quinto $344\frac{3600}{4350}$.

Probatio certa eſt recte ſupputatum eſſe, ſi poſt hæreditatis partitionem, omnium filiorum partes trium millium aureorum ſummæ reſpondeant. Hæſitationem hanc extricantes vulgarem ſupputationum morem ſecuti ſumus. Cæterum qui Arithmeticæ penetralia magis callent, breuiori via ſeſe expediunt. Eam autem in ſequenti quæſtione trademus.

	1500		Primus	1034	$\frac{2100}{4350}$
	1000		Secũdus	689	$\frac{2850}{4350}$
4350	750	3000	Tertius	517	$\frac{1050}{4350}$
	600		Quartus	413	$\frac{3450}{4350}$
	500		Quintus	344	$\frac{3600}{4350}$

Quæſtio XVIII.

QVINQVE ſocij tria aureorum millia lucrifacta diuidere inter ſe de cõpacto ſic cupiunt, vt primus vnã partem ſecundam ſibi habeat, Secundus vnã tertiam, Tertius vnam quartã, Quartus vnam quintã, Quintus vnam ſextam. Cæterũ hæſitant quonã modo iuſta partitio fiet. Ad huiuſmodi quæſtiones explicandas numerum aliquẽ exquirere oportet, qui partes denominatas omnes complectatur. Is autem eſt minimus numerus, quem partium denominatores numerant: qui quemadmodũ exquiratur, ſuperiori libro edocuim9. Itaque in hoc quæſito minimus numerus, qui partes propoſitas habeat, cõperietur ſexaginta. In quo numero ſingulæ partes propoſitæ ſeorſum inquirẽdæ ſunt. Id quod per ſectionem ipſius numeri ſexagenarij, per earum ſingulas ſeparatim expeditur. Quo fiet, vt partitionis numerus partem de ſexaginta ſecundam, triginta inueniat, tertiam viginti, quartam quindecim, quintam duodecim, ſextam decem: qui numeri in vnum collecti omnes octoginta ſeptem creant. Ad harum partium exemplum, quæ de ſexaginta ſunt erutæ ſingulorũ portiones, de ſumma triũ millium aureorum diuidenda formandæ ſunt. Nam ſicut omnes illi ſectionis numeri, quos ſexaginta diuiſa pariunt, ſimul additi ſe habent ad eorum ſingulos: ſic ſumma trium millium aureorum diuidenda, ad illam ſummam, quæ cuique ex partitione debetur, ſe habere debet. Et permutatim, ſicut omnes illi ſectionis numeri de ſexaginta eruti ſe habent ad tria aureorum millia diuidẽda: ſic vniuſcuiuſque ſectionis numerus ad illam ſummam, quam quiſque ex partitione conſequetur, ſe habere debet. Itaque ſi primam ſedem omnes ſectionis numeri de ſexaginta prodeũtes, ſimul additi teneant, qui ſunt 87, Secundam ſinguli eorum, alius ſub alio ſeorſum annotati, Tertiam trium millium aureorũ ſumma diui-

denda: quatuor proportionalium regula negotium extricabit.

	30		Primus	$1034\frac{42}{87}$
	20		Secūdus	$689\frac{57}{87}$
87	15	3000	Tertius	$517\frac{21}{87}$
	12		Quartus	$413\frac{69}{87}$
	10		Quintus	$344\frac{72}{87}$

Partes ex ſectione cuique obueniētes ſummæ diuidendæ reſpōdebunt, ſi recte proceſſit calculus. De induſtria hic eandē ſummā quæ in proximo quæſito erat, in eaſdem partes ſecandā propoſuimus, vt lector ſciret quanto breuius per minores numeros, quàm per maiores, eadem res expediri poſſit: id quod propter faciliorem tum multiplicationem, tum ſectionem euenire neceſſum eſt.

Quæſtio XIX.

QVI quatuor amicos habebat, eorum primo nouem aureos in teſtamento legauit, Secūdo viginti quatuor, Tertio tanto amplius quàm ſecundo dedit, quantum ſecundus ſupra primum haberet; Quarto tanto amplius quàm tertio, quantū tertius ſupra ſecundū caperet. quæritur quantū tertius & quartus cōſequentur. Hæſitationem conſyderantes, proportionalitatē in ea continuam deprehendemus. Nam ſicut primi legatum ad legatum ſecūdi ſe habet, ſic ſecundi ad legatum tertij ſe habere debet. Et rurſus, ſicut ſecūdi legatum ſe habet ad legatum tertij, ſic tertij ad quarti legatum. Atque è conuerſo, ſicut quarti legatum ſe habet ad legatum tertij, ſic tertij ad legatum ſecundi. Et rurſus, ſicut tertij legatum ad ſecundi ſe habet, ſic ſecundi ad primi legatum ſe habere debet. Quamobrem ſecundum trium proportionalium regulam ſuprà à nobis enarratam res explicari debet, vt ſecundi legatum, quod in proportionum comparatione bis repetitur, in ſe multiplicetur, & numerus inde procreatus per primi legatum diuidatur. Ita ſectionis numerus tertij legatum in lucem proferet aureos 64. Et rurſus tertij legatum, quod in proportionum continuatione bis repetimus, in ſe multiplicandum eſt, & numerus ex hoc enatus per ſecundi legatum diuidendus. Quo fiet, vt ſectionis numerus quar-

ti legatum manifeſtet aureos 170 $\frac{16}{24}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$ vnius aurei.
9 24 64 170 $\frac{16}{24}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$.

Quæſtio XX.

INTER tres, aureorum ducentorum diuiſio de compacto fieri debet, vt primus triplo plus quàm ſecũdus habeat, ſecundus quadruplo plus quàm tertius: Quonam modo, ſecundum pactum fiet iuſta partitio? Facile id extricabitur, ſi à tertio qui minimã partem accepturus eſt, retrogrado ordine incipias: cui aſſignes, ſi libet, vnitatem. Et quia in quadruplo ſecundus tertium ſuperabit, tertij partem quadruplica, & enaſcentur quatuor, quæ pars erit ſecundi. At quoniam primus triplo amplius quàm ſecundus conſequetur, ſecundi pars triplicãda eſt, & prodibunt duodecim. ea pars erit primi. Hi numeri ſimul additi creant ſeptendecim, ſecundum quem numerum ſummæ propoſitæ partitio fiet: in totidem nanque partes aurei ducenti diuidendi ſunt, vt ex his primus 12, ſecundus 4, tertius vnam habeat. Confeſtim verò quis aureorũ numerus cuique cedet, ſecundum regulam quatuor proportionalium excutiemus, ſi primo loco partes omniũ ſimul additas ponamus. eæ ſunt 17: ſecundo cuiuſque partem, aliam ſub alia ſeorſum annotatam: tertio ſummam 200 aureorum diuidendam. Nam quæ proportio eſt omnium earum partium ſimul additarum ad cuiuſque partem, eadem erit ſummæ diuidendæ ad eam quam quiſque habiturus eſt. Et permutatim, quæ proportio eſt ſimul additarum omnium partium ad ſummam diuidẽdam, eadem erit cuiuſque partis ad eam ſummam quam quiſque conſequetur.

	12		Primus 141 $\frac{3}{17}$
17	4	200	Secundus 47 $\frac{1}{17}$
	1		Tertius 11 $\frac{13}{17}$

Si vis probare ſecundum pacta proceſſiſſe calculum, partem primi in tria diuide: & ſectionis numerus ſecundi partẽ educet. Rurſus ſecundi partem in quatuor: & numerus partitionis tertij partem proferet.

Quæſtio XXI.

TRES inter ſe partiri centum aureos cupiunt, quorum primus

vnam tertiam & vnam quartam habere poſtulat, Secundus vnam quartam & vnam quintam, Tertius vnam quintã & vnam ſextã: Quæritur quantum cuique ex partitione obueniet? Ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas, in primis minimus numerus exquirendus eſt, qui omnes cuiuſque denominatores ſimul capiat. Is autẽ eſt ſexaginta. Ex quo numero, quæ partes vnicuique ex partitione prouenire deberent, ſi is diuidendus eſſet, prius inueſtigare oportet: id quod facile deprehendi poteſt, diuidendo numerum ipſum ſexagenarium ſeparatim per ſingulos partiũ denominatores. Deinde partes ex numeris ſectionum inuẽtæ, ſeorſum addẽdæ ſunt, vt ſciamus quantũ cuique partes ſuæ cõiunctæ dabũt. Ita numerus partitionis de ſexaginta partem tertiam 20, partem quartã 15, quæ per additionem educunt 35, primo deberi patefacit. Partẽ verò quartã 15, & partem quintã 12, quæ per additionem faciunt 27, ſecundo deberi. Partem autem quintam 12, & partem ſextam 10, quæ per additionem procreant 22, tertio deberi. Ad quarum partium de ſexaginta erutarũ exemplar, poſtquam numeri ex his collecti ſunt additi: ſinguli portiones ſuas de ſumma centum propoſita facile conſequentur. Etenim ſi primo loco numeri illi, ex cuiuſque partibus ſeparatim per additionem numerorum ſectionis iam collecti, videlicet 35, 27, & 22, mox omnes in vnum rurſus additi ſtatuantur, vt ſint 84: Secundo ſinguli illi ſeparatim per additionem numerorum ſectionis collecti, alius ſub alio ſeorſum annotati: Tertio ſumma centum, quæ diuidenda eſt: facile per quatuor proportionalium regulã res tota extricabitur. Nam ſicut in vnum coaceruati omnes illi cuiuſque numeri, qui per additionem numerorum ſectionis ſeorſum collecti erant, ſe habent ad ipſorũ ſingulos: ſic centum quæ diuidenda ſunt, ad illam ſummam quæ cuique ex partitione debetur, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut in vnum coaceruati omnes illi cuiuſque numeri, qui per additionem numerorum ſectionis ſeorſum collecti erant, ſe habent ad centum quæ ſunt diuidẽda: ſic ſinguli cuiuſque numeri per additionem numerorũ ſectionis ſeorſum collecti, ad illam ſummam, quam cuique partitio aſſignabit, ſe habere debent.

	35		Primus	$41\frac{56}{84}$ quæ ſunt $\frac{2}{3}$
84	27	100	Secundus	$32\frac{12}{84}$ quæ ſunt $\frac{1}{7}$
	22		Tertius	$26\frac{16}{84}$ quæ ſunt $\frac{4}{21}$

Quæſtio XXII.

QVATVOR inter ſe diuidere ſexcentos aureos ſic cupiunt: vt primus duas tertias, atque vnà nouem aureos habeat: Secūdus tres quintas, & aureos octo: Tertius quinque ſextas, & aureos ſeptem: Quartus ſeptem octauas, & aureos ſex: ambigitur, quantum cuilibet conferet partitio. In primis minimus numerus, qui omnes has denominationes capiat, inquirēdus eſt. Is autem eſt centum & viginti. Quem numerum ſi per ſingulas denominationes ſeces, inuenies tertiam eius partem, quadraginta: Quintā, viginti quatuor: Sextam, viginti: Octauam, quindecim. Cæterum quoniam primus duas tertias habiturus eſt, quadraginta illa quæ partem tertiam faciūt, duplicare oportet, & ſurgent octoginta. qui numerus in duabus tertijs reperitur. Et quia vltra duas tertias, primo etiam nouē aurei accedunt: nouem addenda ſunt ad 80, vt fiant 89. ea ſumma eſt eorum, quæ primus habere poſtulat. Porrò quia ſecundus tres quintas habebit, viginti quatuor quæ quintam faciunt, triplicanda ſunt, & fiēt ſeptuaginta duo. qui numerus in tribus quintis reperitur. Et quia vltra tres quintas octo aurei ſecūdo debentur, adduntur octo, quæ creant 80. ea ſumma eſt eorū, quæ ſecundus flagitat. Præterea quia tertius quinque ſextas eſt conſequuturus, viginti quæ ſextam implent, in quinque ducere eſt opus, & prodibunt centū. qui numerus in quinque ſextis reperitur. cui, quia tertius ſeptem aureos amplius petit, ſeptem adiungantur: & fient cētum & ſeptem. quæ ſumma eſt eorū, quæ tertio debentur. Quartus verò quoniam ſeptem octauas poſtulat, quindecim quæ octauam creant, ducere in ſeptem oportet. & enaſcentur centū & quinque. qui numerus in ſeptem octauis deprehenditur. cui numero (quia quartus ſex aureos adhuc exigit) addere oportet ſex, & ſurgent centum & vndecim. quæ ſumma eſt omniū, quæ quartus habiturus eſt. En tibi numeros quos quiſque habere poſtulat: quos omnes ſi ſimul addas, ſurgent trecēta octoginta ſeptem. Ad cuius ſummæ exemplum ex partibus ſic collectæ, ſexcentorum aureorū partitio fieri debet. Nam ſicut omnes numeri, qui in partibus denominatis ſeorſum reperiuntur, vnà cum cuiuſque aureorum acceſſione, ſimul additi ſe habent ad ſingulos ipſos numeros: ſic ſexcenti aurei, qui ſunt diuidendi, ad numerum quem cuique partitio aſſignabit, ſe habere debēt. Et permutatim, ſicut omnes illi numeri, qui in partibus denominatis ſeorſum reperiuntur, vnà cum aureorum acceſſione ſimul additi ſe habent ad ſexcentos aureos:

ſic ipſorum numerorum ſinguli ad numerum qui cuique ex partione debetur,ſe habere debēt.Quocirca primo loco poſitis numeris illis omnibus,ſimul additis qui ex partibus denominatis & aureorū acceſſione ſurgunt,qui faciunt 387:ſecundo,eorū ſingulis,alio ſub alio ſeorſum annotato:tertio, ſumma 600 aureorū: ſtatim quantum cuique ex partitione accreſcet, quatuor proportionaliū regula demonſtrabit.Et ſi partes omnes cuique accreſcentes collectæ,æquales erunt ſummæ diuidendæ,nihil eſt erratum.

	89		Primus 137 $\frac{381}{387}$
	80		Secūdus 124 $\frac{12}{387}$
387		600	
	107		Tertius 165 $\frac{345}{387}$
	111		Quartus 172 $\frac{36}{387}$

Quæſtio XXIII.

ESTO, centum aurei inter tres ea lege diuidendi ſint, vt quoties primus quinos conſequitur,ſecundus ſenos capiat:quoties ſecundus ſeptenos habet,tertius ſumat nouenos. In hac partitione ambigitur, cū pro quinis quibuſque primi ſecūdus ſenos habeat, quantum debetur tertio.Rem inuolutam ſic extricabis,Conſydera ſi ſepteni aurei ſecundi tertio nouenos pariūt: facile ſciri poteſt quot aureos tertio ſecundi referent. Nam ſicut ſepteni ſecundi ſe habent ad ſenos eiuſdem:ſic noueni tertij ad ſummā quā is habiturus eſt,ſe habere debēt.Et permutatim,ſicut ſepteni ſecūdi ſe habēt ad tertij nouenos:ſic ſecundi ſeni ad ſummā quā tertius eſt cōſequuturus.Quare quatuor proportionaliū regula deprehēdit,pro numero tertij in tota hac partitione, aureos ſeptenos & $\frac{5}{7}$ ſumendos eſſe. Quamobrem ſi omnium triū numeros, videlicet 5,6,& 7 cum $\frac{5}{7}$ in vnam ſummam coacervatos primo loco ſtatuamus,videlicet centum triginta & vnam ſeptimas $\frac{131}{7}$, ſecundo autem eorum ſingulos,alium ſub alio ſeorſum annotatum deſignemus, tertio ſummam centum diuidendam: quatuor proportionalium regula ad exemplum prioris proportionis, quæ de omnibus illis partibus ad earum vnamquanque reperitur, facile poſteriorem de ſumma diuidenda, ad eam ſummam quam quiſque habiturus eſt, deformabit:ſtatimque patefaciet primo 26 $\frac{94}{131}$, ſecundo 32 $\frac{8}{131}$,tertio 41 $\frac{29}{131}$ ex partitione deberi.

	5		Primus 26 $\frac{94}{131}$
$\frac{131}{7}$	6	100	Secūdus 32 $\frac{8}{131}$
	7 $\frac{5}{7}$		Tertius 41 $\frac{29}{131}$

IN HAC partitione facienda, quando alioqui exercitatos labi nonnunquam vidimus, admonendos iuuenes eſſe duximus, ne errarent: vt poſtquam primi & ſecundi numeros in centū multiplicatos per diuiſorem ſecuerint, cum ad tertij numerū ventū erit, integra in minutias eis adiūctas ſtatim redigant, vt fiāt 54 ſeptimæ, quas deinde in centū multiplicent, ſic ſurgēt $\frac{5400}{7}$. Hoc loco quia minutiæ quæ diuidēdæ ſunt, & quæ ſunt diuiſores, eādē denominatorē habēt: maior numerator earū quæ ſecandæ ſunt, per earum quæ ſecant numeratorē minorem, integrorū more diuidendus eſt, vt numerus eruatur qui attinebit ad tertiū. Alioqui cum tam diuiſor quàm diuidendus eaſdem integrorum minutias numerēt, nēpe ſeptimas: ſi diuiſoris denominatorem videlicet ſeptem, in diuidendi numeratorem integrorū minutias continentem, & diuidendi denominatorem in diuiſoris numeratorē itidem integrorū minutias numerantem, duceremus in formam crucis: tunc tam diuiſorem quàm diuidendum, qui integrorū ſeptimas cōtinent, ad ſeptimarū ſeptimas redigeremus. & cum duas priores ſectiones de ſimplicibus minutijs expediuerimus, ſcilicet de integrorum ſeptimis: tertiā hanc, quæ cum eis conſentire deberet, de minutiarū minutijs faceremus, totiúſque partitionis mutaremus diuiſorem.

Quæſtio XXIIII.

QVATVOR inter ſe partiri cētum aureos ſic cupiunt, vt quot ternos primus capit, totidem ſecūdus quaternos habeat: quot quinos ſecundus, totidem ſenos tertius ſumat: quot tertius ſeptenos, totidem quartus octonos cōſequatur. Ambigitur quonam modo fiet iuſta partitio. Multos exercitatos vidimus ad hoc ſaxum impingere, dum nec ſingulorum partes ſcirent inueſtigare, neque his tandē inuentis, ſummā propoſitam ad earum rationem diuidere. Tota autē res ſic expedietur. Principio ſingulorū partes ad eundem modū exquiruntur quem proximo quæſito monſtrauimus. Et ſecundi quidē pars, cui fabricandæ primi portio dat legem, facile cognoſcitur, cū alter ternos, alter quaternos ſit accepturus. Tertij verò portio, quæ tot ſenos habere debet, quot ſecundus quinos

capit: non tam citò ſeſe offert, cum ſecundus quaternos non quinos ſumat. Quamobrem conſyderandum eſt, ſi quini aurei ſenos afferunt, quot aureos quaterni reddent: & per quatuor proportionalium regulam deprehendemus tertij portionem capere aureos 4 & $\frac{4}{5}$. Rurſus quarti pars, quæ tot octonos habere debet, quot tertius ſeptenos ſumit, cum tertij portio 4 & $\frac{4}{5}$ non ſeptenos capiat, ad hunc modũ exquiretur, vt videndum ſit ſi ſepteni pariunt octonos, quot ad eam rationem ex 4 & $\frac{4}{5}$ obuenire debent. Et quatuor proportionalium regula monſtrabit quarti portionem 5 & $\frac{17}{35}$. Demum poſtquam exquiſitæ ſunt partes ſingulorum, omnes in vnam ſummam per additionem colligantur, & prodibunt $\frac{605}{35}$: quæ diuiſoris fungentur partibus, & primum locum tenebũt. ſecundum, ſingulorum partes aliæ ſub alijs ſeorſum annotatæ. tertium, ſumma 100 aureorum, quæ diuidenda eſt. Cætera per quatuor proportionalium regulam expediãtur. Cum autem ad quarti portionem ventum erit, poſtquam ea in centũ multiplicata eſt, quia minutiæ productæ denominatorem habebunt eundem, quẽ diuiſor: ideò numerator earum ſolus per diuiſoris numeratorem, integrorum ritu ſecetur, ſicut in proximo quæſito monſtrauimus: cuius rei rationem illic aperuimus. partes autem cuiuſque apparebunt, hæ quæ ſequuntur.

	3		Primus	17 $\frac{43}{121}$
	4		Secundus	23 $\frac{17}{121}$
$\frac{121}{7}$		100		
	4$\frac{4}{5}$		Tertius	27 $\frac{465}{605}$ quæ ſunt $\frac{93}{121}$
	5$\frac{17}{35}$		Quartus	31 $\frac{89}{121}$

Quæſtio XXV.

LEGIO habet peditum ſex millia & centum, equites ſeptingẽtos viginti ſex. Eſto, pedes ſtipendium quatuor nummos ſeſtertios in diem capiat, eques nouem. Si duorum millium aureorum præda ſecundum eandem rationem inter eos diſtribuenda ſit, quantũ conſequentur equites? quantúmque pedites? In primis multiplicare oportet equitum numerum in numerum ſtipendij, quod eorum quilibet in diem capit, & ſurgẽt 6534. quæ ſumma ſeorſum erit annotãda. Itidémque faciendũ eſt de peditũ numero, & fient 24400, quæ ſeorſum etiam notentur. deinde illi duo numeri procreati ſi-

mul addātur,& prodibunt 30934. quæ ſumma ſi reperta eſſet,nullo negotio inter equites & pedites poſſet diuidi.Atque ideo ad illarum ſummarum productarum exemplum, hæc, quæ propoſita eſt, ſumma duorum millium erit diuidenda. Nam quæ proportio eſt amborum productorum numerorũ ad alterum ex ductu equitum in ſua ſtipendia natum , eadem comperietur numeri propoſiti duorum millium ad eum numerum, quem equites ex præda habere debent.Et permutatim,quæ proportio eſt amborum numerorum productorum ad numerum propoſitum duorum millium, eadem erit alterius ex ductu equitum in ſua ſtipendia nati,ad numerum quem equites ex præda conſequentur. Quare vt primum de equitibus abſoluamus: primo loco ambos numeros productos ſimul additos locemus, ſecundo numerũ ex ductu equitum in ſua ſtipendia procreatum,tertio numerum diſtribuendum duorũ millium.Deinde ex quatuor proportionalium regula deprehēdemus equitibus obuenire $422 \frac{13852}{30934}$, quæ ſunt $\frac{6926}{15467}$ Ea ſumma eſt quam equites vniuerſi conſequentur.quam ipſam ſi per equitum numerum poſtea diuidas,tum deprehēdes quantum vnuſquiſque eques habiturus eſt.Et quoniam ea minor eſt quàm vt per equitum numerum ſecari poſſit, in viliorem pecuniam multiplicanda eſt, vt ſectionē ſubire valeat. De peditum portione inueſtiganda ſimiliter agendum erit. Nam quæ proportio eſt amborum productorũ numerorum ad alterum ex ductu peditum in ſua ſtipendia natũ, eadem reperietur propoſiti numeri duorum millium ad eum numerum quem pedites ex præda cōſequentur.Et permutatim, quæ proportio eſt amborum productorum numerorum ad numerum propoſitum duorum millium,eadem erit alterius ex ductu peditũ in ſua ſtipendia nati, ad numerum quem pedites ex præda habituri ſunt . Cætera eo modo expediantur quo de equitibus diximus: & peditum portio erit $1577 \frac{17082}{30934}$.

AD EVNDEM modum diſtributio fiat, ſi inter canonicos & alios cuiuſuis templi ſacerdotes pecuniam diuidere ſic oporteat, vt quoties inferiori ſacerdoti tria obueniunt,canonico accreſcant quinque.

Quæſtio XXVI.

IN VNA moletrina trinæ molæ reperiuntur,quarum vnæ duodecim horis modios tritici decem & octo molunt : Secundæ, per idem tempus modios tredecim : Tertiæ , tanto tempore modios

octo. Accedit ad moletrinam ruſticus, tritici modios afferens vigintiquatuor, quos omnibus molis ſic ſupponi deſyderat, vt vno momento ſingulæ ſuum opus abſoluant. & ſcire cupit à molitore quanto tempore ſit expectandum vt res expediatur, quantúmque quibuſque molis ſit ſubijciendum, vt omnes vnà deſinant. Prima quæſtio facilis explicatu videtur, ſi omnes modios ſimul addamus quæ duodecim horis moluntur à trinis molis: cum duæ proportiones deprehendentur, vna de omnibus illis modijs ſimul additis, qui ſunt triginta nouem, ad modios viginti quatuor à ruſtico allatos: altera de duodecim horis, ad illum horarum numerum, quo molæ expedient opus. Etenim ſicut omnes modij ſimul additi, qui ſunt 39, ſe habent ad 24 modios à ruſtico allatos: ſic horæ duodecim ad illum horarũ numerum quo res abſolui poteſt, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut illi 39 modij ſimul additi ſe habent ad duodecim horas, ſic 24 modij ad illum horarum numerum quo res finietur. Ita demum ex quatuor proportionalium regula comperietur, vigintiquatuor modios à trinis illis molis expediri poſſe ſeptem horis & quindecim triceſimis nonis.

Modij	Modij	Horæ	Horæ
39	24	12	$7\frac{15}{39}$

Poſtquam deinde prius quæſitum de tempore, quo modij 24 ſimul abſolui poſſunt, exploratum eſt: poſterius quæſitum de modiorum numero, qui ſingulis quibuſque molis ſubijci debet, continuo poteſt excuti, cum de tempore iam certo ad ſingularum molarum modios quæſtio ſit verſa. Nam ſicut 12 horæ ſe habent ad horas 7 & $\frac{15}{39}$: ſic 18 modij qui per primas molas 12 horis conficiuntur, ad illum modiorum numerum ſe habere debet qui horis 7 & $\frac{15}{39}$ molis eiſdem ſubijcientur. Et permutatim, ſicut 12 horæ ſe habent ad modios 18, qui per primas molas eo tempore expediuntur, ſic horæ 7 & $\frac{15}{39}$ ad illum modiorum numerũ qui eiſdem molis per id tempus ſunt ſubijciendi. Ad quem modum ſi per ſecundas atque item tertias molas comparationem facias, quæ res antè obſcura viſa eſt, à regula quatuor proportionalium illuſtrabitur. Id quod ſtatim fiet, ſi primo loco horas 12 ſtatuas, Secundo horas 7 & $\frac{15}{39}$. Tertio illum modiorum numerum qui à ſingulis molis duodecim horis confici poteſt, alium ſub alio ſeorſum annotatũ.

Horæ	Horæ	Modij		
		18 Primæ molæ	$11\frac{36}{468}$	quæ faciunt $\frac{1}{13}$
12	$7\frac{15}{39}$	13 Secūdæ molæ	8	
		8 Tertiæ molæ	$4\frac{432}{468}$	quæ faciunt $\frac{12}{13}$

ITA cōperiemus primis molis ſubijciendos eſſe modios vndecim & vnius modij vnā decimātertiā, Secūdis molis modios octo, Tertijs modios quatuor & duodecim decimas tertias. Qui modiorū numerus in ſummā collectus profert vigintiquatuor modios à ruſtico allatos. Ex quo liquere poteſt recte ſupputatum eſſe.

Quæſtio XXVII.

AQVAE plena ciſterna quæpiam fiſtulas tres habet, ex quarum maxima ſi extrahas epiſtomium, vna hora aqua tota effluet. Secunda fiſtula, quæ minor eſt, aquam euomit horis duabus. Tertia, quæ minima eſt, tribus horis emittit aquam. Iam ſi exēptis epiſtomijs, vnà omnes fiſtulæ pateant, ambigitur quanto tempore tota aqua effluet. In hac hæſitatione explicanda, quoniam vna hora integra maxima fiſtula totam aquam fundit, minor horis duabus, minima tribus: minimus numerus in primis inquirendus eſt, quem hi numeri, vnum, duo, & tria numerant. qui quemadmodum ſit inueſtigandus, ſuperiori libro edocuimus. Is autem comperietur numerus ſenarius: qui numeros hos, à quibus numeratur, partes ſuas habet. Et quia intra ſe complectitur numeros illos omnes à quibus numeratur, qui tempus aquæ numerant per ſingulas fiſtulas ſeorſum exeuntis, diuidendus erit vti mox dicemus. Poſtea conſyderandum eſt, ſicut maxima fiſtula vna hora totam aquam exhaurit: ita quæ duabus horis id facit, vna hora aquæ dimidium effundit: quæ tribus horis id peragit, vna hora tertiam aquæ partem emittit. Deinde quia omnes fiſtulæ vno tēpore aperiuntur, omnes numeri incluſi in integro illo & eius partibus, quas numeri eum numerantes denominant, educendi ſunt, vt ſimul addantur. Id quod ſtatim fiet, ſi integrum illum per ſingularum partium denominationem ſeorſum diuidas. quippe ſi ſex per duo ſeces, tria inuenies: ſi per tria, duo. Nam quia numerus ſenarius numerus minimus integer eſt, quem vnum, duo, & tria numerāt: quíque partem vnam ſecundam atque vnam tertiam habeat: ipſe integer ſumendus eſt, cuius pars quidem ſecunda, tria: tertia verò duo continet.

Hi autem numeri,ſex,tria,& duo ſimul additi procreabunt vndecim.qui numerus,tempus aquæ per omnes fiſtulas fluentis,exprimit : numeróſque omnes ex integro illo & eius partibus exeuntes ſimul additos capit.Hic diuiſoris partibus fungetur in hoc quæſito. Cæterum quoniam ſex ab vndecim diuidi nequeunt , vt vterque numerus integer maneat:ideo numerus ille horarum ſenarius in ſexaginta momenta,quæ partes ſunt vnius horæ, multiplicandus eſt, vt ſectionem ferat . Ita numerus continens tempus aquæ ex ſingulis fiſtulis ſeorſum effluentis , per numerum momentorũ aquæ ſimul ex vniuerſis erumpentis diuidetur.qui quoties in horarum numero diuidendo fuerit inuentus, tot effluentis aquæ momenta comperientur.

IDQVE ITA habere huiuſmodi conſyderatione deprehendi poteſt. Nam cum numerus ſenarius complectatur omne tempus ſeparatim elabentis aquæ:fiſtula quæ vna hora aquam educit, ſex horis ſexies id faceret :quæ verò duabus horis aquam emittit, ſex horis ter id perageret: quæ tribus horis aquam exhaurit, ſex horis bis aquã effunderet : atque ita ſimul omnes fiſtulæ ſex horis aquã vndecies educerent. Verum quia in quæſtione propoſita,aqua tantum ſemel,non vndecies ex ciſterna fundenda eſt: quæ proportio eſt inter vndecim & vnum,eadem erit inter ſex & aquæ effundendæ tempus. Et permutatim,quæ proportio eſt inter vndecim & 6, eadem erit inter 1 & tempus aquæ fundendæ. Secundum regulam igitur quatuor proportionalium per 11 ſecãtes horas 6,prius in 60 momenta multiplicatas,vt iam diximus: comperiemus omnes ciſternæ fiſtulas patentes,triginta duobus

60

vnius horæ momentis atque octo vndecimis totam aquam emittere.

11 1 6 $32\frac{8}{11}$

360

VEL SI libet 6 per 11 in minutias ſecare:deprehẽdemus $\frac{6}{11}$ vnius horæ , quæ tempus monſtrant exhauriendæ aquæ. qui ſecandi modus cum priori conſentit:quippe cum in vna hora 60 ſint momenta,quorum pars vndecima momenta 5 & $\frac{5}{11}$ momentorum capiat:ea pars ſexies ſibi addita profert momenta 32 & $\frac{8}{11}$. Porrò momenta 5 ſexies accumulata creant 30. Rurſus $\frac{5}{11}$ momentorum ſexies aggregatæ educunt $\frac{30}{11}$ momentorum , quæ duo integra momenta conſtituunt & $\frac{8}{11}$.

PORRÒ ſi idgenus quæſtioni vnum integrum non admiſceatur, facilius multo explicabitur: nec erit neceſſe numerũ diuidendum in partes ſuas frangere,quandoquidem maior diuiſore com-

perietur. Veluti ſi ciſternæ alicuius tres ſint fiſtulæ, quarũ ſi maxima aperiatur, quatuor horis aqua effluet: ſi minor, horis ſex: ſi minima, horis octo. & ambigitur, ſi vnà omnes fiſtulæ, ſublatis epiſtomijs, patefiãt, quanto tẽpore ex ciſterna aqua tota exibit. Principio minimus numerus inueſtigandus eſt quẽ quatuor, ſex, & octo numerãt. Is autẽ cõperietur vigintiquatuor, qui partes ſuas habet numeros illos omnes à quibus numeratur, tempus numerantes aquæ per ſingulas fiſtulas ſeorſum exeuntis. Hic numerus ſecãdus eſt, vt quæſitum eruamus. Tũ conſyderandũ eſt, Sicut fiſtula quæ ciſternam quatuor exhaurit horis, vna hora quartam eius partem emittit: ſic quæ ſex horis id complet, vna hora ſextam eius partem facit vacuam: quæ horis octo aquam educit, vna hora partem octauam aufert. Deinde quià omnes fiſtulæ vno tempore fluunt: omnes numeri cõprehenſi in illius integri partibus, quas numeri eũ numerantes denominant, exquirendi ſunt, atque vnà addendi: vt per eos integer ille, qui ſuis partibus eos includit, diuidatur. Et quia ex 24, quarta pars cõtinet ſex, ſexta quatuor, octaua tria: ſex, quatuor, & tria ſimul addantur, & fient 13. qui numerus tempus aquæ per omnes fiſtulas ſimul effluẽtis numerat. Hic numerus diuiſor numerum 24 integrum partium ſuarum denominationibus tempus aquæ per ſingulas fiſtulas ſeorſum fuſæ demonſtrantem, atque intra ſuas partes numeros additos includẽtem ſecare debet. Quippe cum numerus 24 capiat omne tempus ſeparatim effluẽtis aquæ: fiſtula quæ ciſternam 4 horis exhaurit, horis 24 ſexies id faceret: quæ ſex horis aquam fundit, horis 24 quater id compleret: quæ horis octo aquã educit, 24 horis ter eam emitteret: atque ita omnes ſimul 24 horis aquã tredecies educerent. Verũ quia in quæſtione propoſita aqua tantũ ſemel non tredecies ex ciſterna fundenda eſt: quæ proportio eſt inter 13 & vnũ, eadem erit inter 24 & aquæ effundendæ tẽpus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter 13 & 24, eadẽ erit inter vnũ & tempus aquæ exhauriendæ. Secũdũ regulam igitur quatuor proportionalium per 13 ſecantes 24, comperiemus omnibus fiſtulis apertis aquam ex ciſterna effluere hora vna & vndecim decimis tertijs. 13 1 24 $1\frac{11}{13}$

Quæſtio XXVIII.

ESTO, ciſterna quæpiam tres habeat fiſtulas, quarum maxima per horæ quadrantem plenã ciſternam exhauriat: minor, per horæ dimidium: quæ minima eſt, per horæ ſpacium totam aquam

fundat: ſi ſublatis epiſtomijs, vnà omnes fiſtulæ pateant, quanto tẽpore vacua reddetur ciſterna? Hæſitatio hæc ſuperiori ſimilis eſt, & ſimili modo ſoluenda, præterquam quòd illic de horis integris, hic de vnius horæ partibus quæſitum eſt. Veruntamen ſi quem minutias vitare iuuat (id quod plerique omnes, quantum fieri poteſt, cupiunt) hic quoque integrorũ more cuncta expediri poſſunt, vt horæ quadrans velut integrum quiddam computetur: horæ dimidium, quod duos quadrantes continet, pro duobus integris: hora verò, quæ 4 quadrantes capit, pro 4 integris. Ita minimum numerum, quem vnũ, duo, & quatuor numerant, inueſtigãtes, deprédemus 8. qui numerus omne tempus elabentis aquæ complectens diuidendus eſt. Deinde conſyderemus eam fiſtulam quæ per horæ quadrantem totam aquam fundit, per octo quadrantes octies id efficere: quæ per horæ dimidium aquam emittit, per octo quadrantes quater id præſtare: quæ per horæ ſpatium aquam exhaurit, per octo quadrantes bis eam educere: atque ita fiſtulas omnes vnà patentes per octo quadrãtes decies & quater aquam fundere. Sed quia in quæſtione propoſita aqua tantum ſemel, non decies & quater emittẽda eſt: quæ proportio eſt inter 14 & 1, eadem erit inter 8 & aquæ exhauriendæ tempus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter 14 & 8: eadem erit inter 1 & tempus aquæ effundendæ. 14 igitur numerus diuiſor erit. Et quia 8 numerus diuidendus, qui horarũ quadrantes numerat, minor eſt quàm diuiſor, propterea multiplicetur in horarum momenta totidem, quot horæ quadrantem efficiunt. ea autẽ ſunt 15. Ita ſurgent 120. quæ ſi per 14 ſecentur, partitionis numerus proferet 8 $\frac{8}{14}$. totidem nanque momentis ciſterna vacua fiet.

Quæſtio XXIX.

AQVAE ductus per ſalientem quatuor horis ciſternam implet. Obſtruſo verò ſaliẽte, fiſtula in ciſternæ fundo, ſi tollas epiſtomiũ, vndecim horis emittit aquam. Iam ſi vacuam ciſternã patefactus ſaliẽs impleat, atque per idem tempus aperta fiſtula exhauriat, intra quãtum temporis plena erit ciſterna? Ex hoc labyrintho ſic tete extricabis. Quia ciſternam implendi tempus, quod quatuor eſt horarum, cum euacuandi tempore, quod eſt horarum vndecim, cõcurrit: quatuor in vndecim ducere oportet, vt vnus numerus de vtroque fiat, qui partes omnes vtriuſque temporis intra ſe cõplectatur. Is autem numerus erit 44. Et quia tempus implendi cele-

rius eſt,& euacuandi tardius: obſeruare oportet vtriuſque tempo-ris inter ſe diſtãtiam.Eam autem ſi alterum tempus ab altero ſub-ducas,numerus reſtans indicabit:qui reperietur ſeptem. Ita ſi nu-merum ex vtriuſque temporis multiplicatione procreatum diui-das per eorum inter ſe diſtantiam : numerus ſectionis patefaciet, quot horis, effluentis aquæ tarditatem celeritas influẽtis aſſeque-tur. Horæ igitur 44 diuiſæ per ſeptẽ,in numero partitionis edu-cunt 6 horas & $\frac{2}{7}$. intra quas ciſterna plena erit. Sic omnes ho-ras & implendi & exhauriendi per multiplicationem in vnum nu rum collectas earum inter ſe differentia ſecabit,vt quæſitum expli ces.Idque ita habere vel ex illa cõſyderatione liquere poteſt: quòd ſaliens quatuor horis ciſternam implens,vna hora quartam eius partem reddit plenam : fiſtula autem , quæ vndecim horis aquam educit,vna hora partem vndecimam eiuſdem quartæ partis exhau rit. Ideo vt ſciamus quantum vna hora conferet ad implendum, ab vna quarta parte pars vna vndecima ſubducatur : & ſuper-ſunt $\frac{7}{44}$. quæ minutiæ reſtantes indicant quot partes ciſternæ vna hora implentur,nempe de quadraginta quatuor partibus ſo-læ ſeptem. Quoties itaque ſeptem in 44 habentur , totidem ho-ræ requiruntur ad ciſternam implendam.Nam ſicut ſeptem ciſter næ partes ſe habent ad 44,quæ ſunt omnes eius partes:ſic vna ho ra,qua ſeptem ciſternæ partes implentur, ad illum horarum nume rum,quo tota plena erit,ſe habere debet.Et permutatim,ſicut ſep-tem partes ciſternæ ſe habent ad vnam horã,ita 44 quæ ſunt om-nes ciſternæ partes, ad eum horarum numerum, quo poterit im-pleri. 7 44 1 6 $\frac{2}{7}$.

Quæſtio xxx.

TVRRIS extruenda eſt,cuius altitudo erit quadraginta cubi-torum,ſingula latera exterius latitudinem habebũt cubitorũ vice-num,interior autem habitatio ad vſus hominum per ſingula late-ra cubitos patebit quindenos:conuenítque cum operis redempto-re,ſingulos aureos in ſingulos cubitos dari. quanti igitur conſta-bit totius turris ſubſtructio?Ad hoc quæſitum perueſtigandũ , in primis quia latera omnia paria ſunt, eorum latitudinem in ſe mul tiplicare oportet.& ſurgẽt quadringenta.Deinde numerus ille ex latitudinis ductu procreatus rurſus in altitudinẽ ducendus eſt , & prouenient ſexdecim millia. tot aureis conſtaret turris, ſi eſſet ſo-lida , nihilque haberet concaui . Cæterum quia interna habitatio

per ſingula latera cubitos patebit quindenos: ipſam cõcauitatẽ in ſe multiplicare oportet: vnde prodibũt ducenta viginti quinque. Qui numerus ex concauitatis in ſe ductu creatus denuo in altitudinem ducendus eſt, atque ita exibunt nouem millia. tot cubitos capit vniuerſa cõcauitas. quæ ſi dematur de turris ſoliditate, quæ ſexdecim millium cubitorum erat, reſtabunt ſeptem millia. tanti conſtabit abſoluta turris.

Quæſtio XXXI.

MVRVS erigendus eſt qui mille cubitos in longitudinẽ porrigetur: ſurget autẽ in altitudinem cubitos quadraginta: at craſſitudo erit cubitorum quinque. Is fiet ex lapidibus ſectis, quorũ vnuſquiſque dimidij cubiti longitudinem habebit, latitudinem partis tertiæ vnius cubiti, craſſitudinem partis quartæ. quot eiuſmodi lapides muro exſtruendo ſufficient? Hæſitatio hæc ſic extricabitur. Muri lõgitudinem, quæ cubitorũ eſt mille, in altitudinẽ, quæ quadraginta eſt, multiplicare oportet: & ſurgent quadraginta millia. qui numerus procreatus rurſus in craſſitudinem, quæ quinque cubitos implet, ducendus eſt: & prouenient ducenta millia. tot cubitos tenet tota muri quadratura. Similiter lapidum dimenſio, quæ conſtat ex minutijs, in ſe multiplicanda eſt $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, & prodibit vna viceſimaquarta vnius cubiti, quæ ſecti cuiuſque lapidis dimenſionem capit. Iam vt ſcias quot lapides murum conſummabunt: per lapidum dimenſionem minutias habentem $\frac{1}{24}$ diuidere oportet muri quadraturam, quæ ex integris numeris cõſtat $\frac{200000}{1}$. Vnde creabuntur quater millena atque octingẽta millia 4800000. toties enim in muri quadratura dimenſio lapidum reperitur. Atque ideo tot lapides muro erigendo ſufficient.

Quæſtio XXXII.

QVATVOR architecti ad prætorium ædificandum euocantur: primus vno anno confectum opus dare ſpondet, Secundus biennio, Tertius triennio, Quartus quadriennio. Iam ſi vnà omnes aggrediantur opus, quanto tempore abſolutũ erit prætoriũ? Quæſtio hæc ſimilis eſt illi de ciſterna tres habente fiſtulas, & ſimili modo ſoluenda. Nã minimus numerus in primis inquirendus eſt, quem hi numeri vnũ, duo, tria, & quatuor numerãt. Hunc autẽ inueniemus duodenariũ, qui numeros illos omnes, à quibus numeratur,

ſeparatim extruendi operis tempus numerantes, intra ſe complectitur: atque ideo annotandus eſt, vt ſectionem ſubeat. Illud poſtea animaduertendum eſt, Qui annum poſcit, anno integro rem abſolutam dabit: qui biennium petit, anno vno operis dimidium conficiet: qui triennium, anno vno tertiam operis partem eriget: qui quadriennium, anno vno quartam ædificabit. Deinde quoniã omnes architecti operas ſuas in vnum conferunt: omnes numeri comprehenſi in integro illo & eius partibus quas numeri eum numerantes denominant, perſcrutandi ſunt, & ſimul addendi. quo fiet, vt cum duodenarius numerus minimus integer exiſtat qui ab vno, duobus, tribus, & quatuor numeratur, quiſque $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ habeat, pro vno anno integro numerus ipſe integer ſumendus ſit. Et cum eius dimidium 6 contineat, tertia 4, quarta 3: numeri illi ſex, quatuor, & tria, qui denominatis illis partibus ſunt incluſi, ad 12 addantur, & fient 25, qui numerus tempus numerat quo omnes architecti ſimul operas conferunt. Hic diuiſor erit: & numerum illum 12 in ſe atque in ſuis partibus numeros additos includentem, ſeparatímque ædificantium tempora complectentem ſecare debet. Ita tempora ſeparatim extruendi operis vno anno cõprehenſa, per tempus iunctim erigendi diuidentur. Nam cum numerus duodenarius complectatur omne tempus operis ſeparatim extruendi: architectus qui vno anno prætorium ædificabit, duodecim annis duodecies id abſolueret: qui biennio id complebit, 12 annis ſexies id efficeret: qui triennio, 12 annis quater opus erigeret: qui quadriennio, 12 annis ter opus conſummaret: atque ita vnà omnes architecti 12 annis vicies & quinquies opus abſoluerent. Sed quia in quæſtione propoſita opus tantum ſemel non vicies & quinquies fieri debet: ideo quæ proportio eſt inter 25 & 1, eadem erit inter 12 & tempus finiẽdi operis. Et permutatim, quæ proportio eſt inter 25 & 12, eadem erit inter 1 & operis finiendi tempus. Itaque per 25 ſecare 12 oportet. & quoniam numerus diuidendus diuiſore minor eſt, 12 quæ annos numerant, in 12 menſes quæ partes ſunt vnius anni ducantur, & prodibunt 144: quæ ſecta per 25 reddent menſes 5 & $\frac{19}{25}$. quo tempore prætorium omnes conſummabunt. 25 1 12 5$\frac{19}{25}$.

QVAESITVM explicari facilius potuiſſet, ſi vnum integrum non fuiſſet admixtum, ſicuti in fiſtularum quæſtione diximus.

Quæſtio XXXIII.

DVO architecti ſuſcipiunt opus faciendum, quorum alter diebus triginta ſolus id perficeret, alter ſolus diebus quadraginta. Hi, quo celerius rem finiant, tertium architectum accerſunt, atque omnes vnà conferentes operas, diebus quindecim totum opus cōficiunt. Quæritur quot diebus tertius accerſitus id ſolus effeciſſet. Vt rem abſtruſam eruamus, principio excutere oportet, quantum illius operis vno die, primorum duorum vterque pro parte ſua fecit. Et quidem ſcitu facile eſt, ſi quindecim illos dies facti ab omnibus operis per vtriuſque dies, quibus ſolus id abſoluiſſet, ſeorſum diuidamus. Ita ſi dies quindecim per dies primi triginta ſecemus: cum maior numerus ſit diuiſor, minor diuidendus: ex minutiæ prodeant neceſſe eſt, quas numerus diuidendus factus numerator, & numerus diuiſor denominator effectus creabunt. videlicet $\frac{15}{30}$, quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{2}$. tātum de illo opere primus vno die fecit. Similiter dies ſecundi 40 ſecantes 15, procreant $\frac{15}{40}$, quæ faciunt $\frac{3}{8}$. tantum de illo opere ſecundus vno die peregit. Iam verò ſi $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{8}$ ſimul addantur: colliguntur $\frac{7}{8}$. tantum vno die de illo opere ambo confecerunt, reliquum fecit tertius. Quantum autem id ſit, ſcies ſi ab vno die, quo ſimul omnes opus faciunt, ſubducas opus à duobus primis factum, nempe $\frac{7}{8}$. ita ſupererit $\frac{1}{8}$. quæ minutiæ reſtantes indicāt octauam operis partem vno die à tertio factam eſſe. Quod cum eſt compertum, videndum eſt quoties in quindecim illis diebus totius operis facti, minutiæ illæ, quæ tertij opus demonſtrant, contineantur. id quod è veſtigio per ſectionem patefiet: nam ſi per $\frac{1}{8}$ quindecim ſecentur, numerus partitionis proferet centum viginti. quo dierum numero tertius ſolus opus conſummaſſet.

Quæſtio XXXIIII.

TVRRIS cuiuſpiā pars tertia ſub terra latet, quarta pars ſub aqua demergitur, cubiti ſexaginta ſupra aquam eminent. Ambigitur quot cubiti in terra ſint, quot in aqua. Minimū numerum exquirere oportet, quem partium illarum ſub aqua & terra tectarum denominatores numerant. Is autem ſi denominator alter in alterum ducatur, inuenietur 12. qui numerus non ſolum latentes illas turris partes intra ſe complectitur, ſed totum etiam turris corpus, cuius illæ ſunt partes. Qua ratione partes quoque cæteras eminētes vniuerſas capit. Itaque ſi à tertia & quarta turris parte reliquas

ſeparare volumus: ſubducamus à 12 ambas illas ſub aqua & terra latentium partium denominationes, quæ faciunt 7. & reſtabunt 5 partes reliquæ de 12. Hæ autem partes ſunt ſupra aquam extantes, quæ cubitos 60 in ſe continent. Iam verò poſtquam comperimus omnes turris partes eſſe 12, atque earum quinque capere cubitos 60, ſcitu facile eſt quot cubiti ſint in tota turri. Nam ſicut turris partes 5 ſe habent ad partes 12, quæ ſunt vniuerſæ, ſic cubiti 60 ad eum cubitorum numerum qui in tota turri continentur, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut partes 5 turris ſe habent ad cubitos 60 quos continent, ſic partes 12 quæ ſunt vniuerſæ, ad eum cubitorum numerum quos tota turris capit. Igitur deſignatis in eum ordinem proportionibus, vt primo loco ſint 5, ſecundo 12, tertio 60: quatuor proportionalium regula deprehendit in tota turri cubitos 144 contineri. 5 12 60 144.

Deinde cubitorum numerus, quos tertia pars ſub terra tegit, facile eruitur: ſi numerum vniuerſorum turris cubitorum diuidas in tria. ſectionis enim numerus, 48 cubitos profert, qui ſub terra latent. Eadem facilitate inuenire licet numerum cubitorum, quos pars quarta ſub aquis demerſos tenet, ſi vniuerſos turris cubitos in quatuor ſeces. Nam numerus partitionis educet 36. Itidem ſi vniuerſum cubitorum numerum, videlicet 144, in partium vniuerſarum numerum, nempe 12, diuidas: in numero ſectionis 12 ſurget. Ex quo ſcire licet 60 cubitos 5 partes totius numeri capere. quinquies enim 12, creant 60.

Quæſtio XXXV.

ROMAM ex Britannia quiſpiam proficiſcens ſingulis diebus viginti millia paſſuum conficit: Septimo pòſt die alter iter ingreſſus triginta tria paſſuum millia quotidie progreditur. Quot diebus illum præcedentem hic ſequens aſſequetur? Vt rem confeſtim explices, ſpatium in primis annotare oportet à priore confectum, antequam poſterior profectus eſt: id eſt centum viginti millia paſſuum, ſex diebus confecta. Quæ ſumma diuidēda eſt. At illud ſpatium quod quotidie poſterior amplius quàm prior conficit, diuiſor nobis erit. id autem eſt tredecim millia paſſuum. Ita ſi centum viginti per tredecim ſecemus: deprehendemus in numero ſectionis, nouem dies tres tertiasdecimas. per quod tempus poſterior priorem conſequetur. 13 1 120 $9\frac{3}{13}$.

Quæſtio xxxvi.

NAVIS ex Britannia in Palæſtinam proficiſcens,ſingulis diebus ſeptuaginta millia paſſuum procedit: noctibus verò reflante vento,retrò à curſu ſuo quindecim millia reijcitur. Iam cum tota nauigatio quater millena millia paſſuum capiat,quando in Palæſtinam appellet nauis? Facile id extricatu eſt. nã nocturna milliaria à diurnis deducenda ſunt:& ſumma reſtans quæ curſum nauis indicat,diuiſoris partes ſubibit,per quam ſecare oportet totius nauigationis numerũ,nempe 4000. Ita ſectionis numerus demõſtrabit ſeptuaginta duobus diebus & quadraginta quinquageſimis quintis nauigationẽ hanc abſolui poſſe. 55 1 4000 $72\frac{40}{55}$

Quæſtio xxxvii.

CVRSOR ab Eboraco Londinum proficiſcens,quinque diebus iter conficit: at alter magis expeditus à Londino Eboracũ tribus diebus excurrit. Si eodem tẽpore vterque,alter à Londino,ab Eboraco alter diſcedit,intra quantum tempus occurret alter alteri? Ad hoc quæſitum eruendum, ex his duobus curſoris vtriuſque temporibus laterum vicem ſubituris per multiplicationem alterius in alterum, vnũ numerum producere oportet,qui itineris ab vtroque ſeparatim cõficiendi vniuerſum tẽpus per multiplicationẽ coaceruatũ intra ſe cõplectatur. tria igitur in 5 ducta,15 progenerabunt: qui numerus annotandus eſt,vt ſectionem patiatur. Deinde quia vterque vno tempore iter facit: vtriuſque tempus ſimul eſt addẽdum,& per ſummam ex hoc ſurgentem,quæ eſt 8,continuo diuidere oportet numerum illum 15 productum. Ita ſectionis numerus tempus occurſus monſtrabit. Idque ita eſſe hac conſyderatione deprehẽdemus,quòd qui quinque diebus iter peragit, vno die conficit partem eius quintam:qui tribus diebus, vno die tertiam. Quocirca numeri incluſi in producti numeri partibus illis denominatis,quas vterque vno die conficit,inueſtigandi ſunt,& ſimul addendi. Quo fiet, vt cum de quindecim quinta pars tria, tertia quinque capiat, quinque & tria ſimul addantur, & ſurgent octo. quæ ſumma tempus vtriuſque itineris vnà cõficiendi numerat. is diuiſor erit. Nam numerus intra ſe complectens ſeparatim peragẽdi itineris tempora in ſe multiplicata ſecabitur per numerum itineris vnà conficiendi. & quoties hic in illo deprehendetur, tot dies ad curſorum requirũtur occurſum. Ita ſi quindecim per octo diuidantur, partitionis numerus vnum diem & ſeptem octauas

proferet, quo tẽpore in itinere alter alteri occurret. 8 1 15 $1\frac{7}{8}$

ALIA etiam conſyderatione rem ita ſe habere facile ſciri poteſt, quòd in quindecim illis diebus ex vtriuſque tempore in ſe multiplicato productis, alter curſor quinquies, alter ter iter abſoluiſſet. qua ratione ambo vnà octies per id tẽpus iter confeciſſent. Verũtamen quia in quæſtione propoſita ambo ſemel, at nõ octies, iter ſunt facturi: quæ proportio eſt inter 8 & 1, eadem erit inter 15 & tempus occurſus. Igitur ſecundum regulã quatuor proportionalium per 8 ſecantes 15, in numero ſectionis inueniemus $1\frac{7}{8}$.

Quæſtio XXXVIII.

SPATIVM eſt quod expeditus curſor vno die ter cõficit, alter paulo ſegnior vno die bis illud permeat: ſi alter alteri obuiam eodem tempore prodeat, quando inter ſe occurrent? Si rem bene cõſyderes, quoniam vnus dies totum tempus vtriuſque itineris peragendi intra ſe complectitur: diuidere oportet vnum diem per tẽpus vtriuſque ſimul additũ, quod in ſumma facit quinque: ex qua ſectione proferetur vna diei pars quinta, quæ tempus occurſus indicabit. Idque ita eſſe ex hoc apparebit, quòd qui ter vno die ſpatium tranſcurrit, tertia diei parte ſemel id conficit: qui verò bis vno die id facit, dimidio diei id complet. Secũdum itaque ea quæ præcepta ſunt quæſtione proxima, ſi $\frac{1}{2}$ ducatur in $\frac{1}{3}$, exit $\frac{1}{6}$ diei, in qua alter $\frac{1}{2}$ ſui itineris, alter $\frac{1}{3}$ expediet. Deinde quia ambo ſimul iter faciunt, amborum itinera ſimul addantur, hoc eſt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, & ſumma ſurget $\frac{5}{6}$: in quibus ſimul ambo quinquies $\frac{1}{6}$ ſui itineris in $\frac{1}{6}$ diei parte facient. Cæterum quia in quæſtione propoſita ambo tãtum ſemel $\frac{1}{6}$ ſui itineris in $\frac{1}{6}$ diei parte ſunt facturi, quæ proportio eſt inter $\frac{5}{6}$ & vnitatem, eadem erit inter $\frac{1}{6}$ & tempus quo inter ſe occurrent. Igitur ſecundum regulam quatuor proportionalium, per $\frac{5}{6}$ ſecantes $\frac{1}{6}$, in numero ſectionis deprehendemus $\frac{6}{30}$: quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{5}$, qua diei parte ambo inter ſe occurrent.

Quæſtio XXXIX.

PATERFAMILIAS miniſtro quatuor aureos tradit, iubétque emi piperis, zingiberis, amygdalarũ, & ſaccari tot libras æquali numero, quot ea pecunia ſuppeditare poteſt. Miniſter cũ pharmacopola hæſitat quot libræ de ſingulis generibus ſumi debeat. Negotium hoc ſic extricabis, In primis animaduerte quanti vna

libra generum ſingulorum in pecunia minutiori conſtabit:eáque ipſa vnius libræ ſingulorum pretia ſimul adde.is numerus futurus eſt diuiſor. Deinde in eum pecuniæ eiuſdem minutioris numerum, quo pretium vnius aurei ſolet æſtimari, quatuor aureos multiplicare oportet,numerúmque ex hoc enatum per diuiſorem ſecare.Ita ſectionis numerus rem totam patefaciet. Exempli gratia, Eſto piperis libra vendatur nummis ſexdecim: zingiberis decem & octo: amygdalarum duobus: ſaccari quatuor. Pretia hæc ſimul adde, & ſurgent 40. Tum quia vnus aureus centum nummis æſtimatur, quatuor aureos in numerum centenarium multiplica, & quadringenta produces:quæ ſecta per quadraginta,educent decem. tot libras ſingulorum generum referunt aurei quatuor.Ratio eſt in promptu. nam cum de vnoquoque genere,ſingularum librarum pretia in vnum diuiſorem ſint coaceruata, neceſſe eſt, quoties is in diuidendo comperietur, tot libræ cuiuſque generis prodeant æquali numero. 40 1 400 10.

Quæſtio XL.

AVRI libram quiſpiam miniſtro tradit in viliorem pecuniam ab argentario permutandam: & cum auri libra conſtet ex aureis quadraginta octo,aureus autem capiat denarios viginti quinque, quinarios quinquaginta, nummos ſeſtertios centum: ex ſingulis æqualem numerum,quantus haberi poteſt,ſibi iubet referri.Miniſter cũ argẽtario deliberat,quot de quoque genere nũmiſmata ſumi debeãt,vt numeri ſeruetur æqualitas.Hæc hæſitatio proximæ, quã modo explicauimus, ſimilis eſt,& ſimili modo ſoluenda. Exquirenda nãque erit aliqua pecunia vilior, quàm ſint vlla nũmiſmata in quæ fit cõmutatio: atque in eam ſingula cuiuſque generis nummiſmata,quæ pluris valent,redigenda ſunt.Quòd ſi nulla minutior in vſu reperitur, fingamus viliorem,atque in eam nummiſmata,quæ nobis reddi volumus,redigamus.Et quoniam apud veteres nummus ſeſtertius,qui de optatis eſt minimus, decem æreis quadrantibus æſtimabatur, vniuerſa nũmiſmata ſoluamus in quadrantes. Sic ex aureo in quadrantes ducto prodeunt 1000, ex denario 40, ex quinario 20,ex nummo ſeſtertio 10.Omnes deinde hi numeri ſimul ſunt addendi, & ſurgent 1070 : qui numerus cuiuſque generis vnum nũmiſma continet. hic diuiſor erit. Poſtea auri libra in ipſos æreos quadrantes multiplicetur, & fient 48000. quem numerum productum ſi per diuiſorem ſecabis, ſe-

ſtionis numerus quadraginta quatuor integra proferet. Totidem enim & nõ plura cuiuſque generis nummiſmata æquali numero miniſter ex auri libra referre poteſt. Cæterum minutiæ adhuc ſuperſunt, noningenti viginti quadrãtes: qui quoniam ſingulorum nummiſmatũ æqualem numerum præſtare nequeunt, pro arbitrio in quamlibet pecuniam cõmutandi ſunt. Aureum hic ſumo, quales Romani veteres fuerunt, quorum plerique adhuc extant, atque inſtar gemmarum in pretio habẽtur: qualéſque noſtrates Nobiles roſati, qui veteribus Romanis pondere reſpondent, auri verò in-

dicatura paululũ quid-	1000			
dam cedũt; cum veteres	40			
Eduardei noſtrates & in-	20			
dicaturã & pondus vete-	10			
rum Romanorũ referãt.	1070	1	48000	$44\frac{920}{1070}$

Quæſtio XLI.

SOCIETATEM tres in annum inierunt. Primus aureos ſexaginta contulit, menſéſque tantũ ſex in ſocietate manſit. Secundus aureorum ſummam attulit, quæ ſeptem menſes ſocijs communis fuit. Tertius ſuos aureos in medium prolatos quinque menſibus cum cæteris cõmunicauit. Lucrum ex his partũ eſt, quod diuidunt æqualiter: quæritur quot aureos ſecundus, quot tertius in ſocietatem intulit. Nodum hũc ſic ſolues, Cum ſingulorũ pecuniæ ſuos menſes habeant, primi aureos ſexaginta in numerũ ſuorum menſium, quibus cõmunes fuerunt, multiplica: & ſurgent 360. Deinde lucrũ æqualiter diuiſum indicat etiam aliorũ aureos in ſuos mẽſes multiplicatos, qui lucrũ pepererũt, eandem feciſſe ſummã quæ primi menſium & pecuniæ erat. Quare ſi vtriuſque aureorũ ſummam à numero ſuorũ menſium ſeparare voles, ſummam illam ex primi menſium & pecuniæ multiplicatione collectam bis diuide, ſemel per menſes ſecundi, qui ſunt 7: & numerus ſectionis pecuniam ab illo collatã indicabit, 51 $\frac{3}{7}$. Iterúmque per tertij mẽſes 5, & partitionis numer⁹ aureos ab eo cõmunicatos manifeſtabit 72.

Quæſtio XLII.

IN SACCVLO communem aureorum ſummam tres habebãt, quorũ vnuſquiſque ſuæ ſummæ numerũ ignorabat. Veruntamen eorũ primus ſocios ſuos ſciebat ambos centũ & quinquaginta aureos habere. Secundus cognoſcebat alios ambos habere ducentos

& quadringenta, Tertius reliquos habere trecentos viginti ſex. Aperto deinde ſacculo,coniectóque illo aureorũ numero in grandem alienæ pecuniæ aceruũ,hæſitant inter ſe,cum ſuũ quiſque neſciat, quot aureos in vniuerſum omnes, quótque ſinguli repetere debeāt. Difficile videtur explicatu prima facie: cæterum penitius introſpicienti res ſeſe aperit. Nam cum tres ſint, & eorum vnuſquiſque pecuniæ alienæ numerum ſciat,ſuæ pecuniæ portio, quæ ad quenque attinet, ab ipſo ignorata, cognita eſt à reliquis duobus. Quare ſi omnes aliorũ numeros ab vnoquoque cognitos in vnum addamus, bis ſingulorum pecuniam numerus ille tenebit. Collecti autem omnes hi numeri procreabunt ſeptingenta ſexdecim: qui numerus vniuerſam omnium pecuniam bis capiat neceſſe eſt. Quo fit vt dimidium eius, aureorum numerum qui ex ſacculo effuſus eſt,demonſtret.is autem eſt 358.ea ſumma eſt omniũ aureorum. Deinde ſi ſcire libet quot aurei ad primum attinebant, à dimidiato illo numero, qui omniũ aureos capit, ſubtrahe ſummam quam ipſe duos reliquos habere ſciebat: ita relictus numerus aureos eius indicabit 208. Iterum ſi ab eodem dimidiato numero ſubducatur numerus quem ſecundus reliquos duos habere cognoſcebat,remanebunt centum decem & octo, qui numerus aureorum ſecundi erat. Rurſus ſi ab illo dimidiato numero demas numerum quem tertius reliquos ambos habere non ignorabat,triginta duo reſtabunt : totidem erant aurei tertij. Certum eſt argumentum recte ſupputatũ eſſe, ſi collecti omnes numeri poſt ſubductionem reſtantes,qui ſingulorũ aureos indicant,ſummæ dimidiatæ,quæ omniũ aureos capit,& ex qua fit ſubductio,reſpondet.

QVÒD ſi de quatuor propoſita fuiſſet quæſtio, quorũ quiſque pecuniam ſciuiſſet aliorum,ſuam ignoraſſet:quia pecuniæ portio, quæ ad quenque ſpectaſſet ab ipſo ignorata, à reliquis tribus cognita fuiſſet,ſummæ omnium cognitæ in vnum additæ ter pecuniam omnium collegiſſent : atque ideo numerus ille ex omnibus collectus in tria ſecandus fuiſſet,vt numerus ſectionis omniũ pecuniam monſtraret.Ex quo ſectionis numero ſingulorum deinde partes per ſubductionem inueſtigandæ fuiſſent eo modo quo dictum eſt.Itidem ſi de quinque fuiſſet ſic inquiſitum(quia pecuniæ portio ad quenque ſpectans ab ipſo ignorata , à quatuor reliquis fuiſſet cognita)numerus ex cognitis ſummis coaceruatus pecuniã communem quater tenuiſſet,atque in quatuor fuiſſet ſecandus, vt omnium pecuniã patefaceret. Eodẽ modo ſi ſex fuiſſẽt, per quin-

que:ſi ſeptē, per ſex ſecūdus fuiſſet collectus ille numerus, q̧ toties caperet ſingulorū pecuniā:& ſic deinceps in infinitū: quærēdæque eſſent per ſubductionem partes ſingulorū eo modo quo diximus.

Quæſtio XLIII.

SACERDOTEM tenentem in crumena pecuniam pauperibus erogandam mendici tres adeunt. is eorum inopiæ miſertus dimidium illius quod in crumena erat primo mendico cōtulit, & duos prætcrea nummos. Secundo verò donauit eius quod relictum erat, dimidium, atque vltra id nummos tres. Tertio quoque ſupra dimidium eius quod reſtabat, quatuor nummos dedit. quo factū eſt vt vnicus nummus ſupereſſet. Libet inueſtigare quot nummi in crumena erant. Multo facilius eſt enarratu, quàm prima fronte videtur, ſi à tertio mendico numeros ordine retrogrado colligere incipias. Nam ſi ad vnicum nummum in crumena relictum addas quatuor, fient 5: quos propter dimidium tertio præter eos à ſacerdote donatū duplicare oportet: ſic prodeunt 10. His tres nummos ſecundo vltra dimidium donatos addere debemus: & ſurgent 13. quos propter dimidium à ſacerdote ei collatū duplicare eſt opus. qua ratione 26 fiunt. His ſi rurſus duos nummos ſupra dimidium primo datos addas, creabis 28: quos ipſos etiamnum duplicare neceſſe eſt propter dimidium primo datum. ſic denique 56 enaſcūtur: qui nummorum numerus in crumena erat. Idque ita habere probabis, ſi numerum illum collectum eo ordine diſtribuas quo ſacerdos fecit. Quippe ſi primo dones dimidium, ſuperſunt 28: ex quibus ſi duos amplius ei eroges, reſtāt 26. Iterum eos propter ſecundum dimidia, & manent 13: de quibus tres ei ſupererogati relinquunt 10. Eos rurſus propter tertium dimidia, & reliquos habes 5: quorum ſi 4 ei conferas, vnicus nummus reſtabit.

Quæſtio XLIIII.

QVI aureos ex regio cubiculo ſurripuerat, ſuſpectus ab oſtiario furti & detentus, eorum dimidium, vt elaberetur, elargitus eſt. oſtiarius inſontem putans, duos aureos ei reddidit. Iterum ſecundus oſtiarius, illum ſuſpectum habens, exitu prohibuit: cui fur dimidium eius quod ſuperfuit obtulit. is quoque inſontem exiſtimans, redditis aureis 4, illum dimiſit. Rurſus illum palatio exeuntem portæ ianitor comprehendit. huic etiam fur dimidium eius, quod reſtabat, velut cani offam obiecit. At is cæteris benignior di-

miſſo ſex aureos reſtituit. ſic demum fur elapſus aureos tantum 12 ex furto deportauit. Inueſtigemus quot aureos in vniuerſum ſurripuit. Res ſic extricabitur quemadmodum in proximo quæſito, vt ordine retrogrado à poſtremo ad primum tendamus: niſi quòd illic ad ſingulas duplicationes, propter aureos ſupererogatos, additione opus erat: hic ad ſingulas duplicationes, propter aureos reſtitutos, ſubductio neceſſaria eſt. Itaque ſi à 12 illis aureis ex furto deportatis, 6 à ianitore reſtitutos demas, ſuperſunt 6: quæ propterea quòd tertio fur dimidium dedit, duplicare oportet, & fient 12. Ab his propter 4, à ſecundo oſtiario reſtitutos ſubtrahamus 4, ſic 8 remanebunt. Ea deinde ideò duplicemus, quòd ſecundo fur dimidium contulit: ita ſurgunt 16. A quibus 2 ob id deducēda ſunt, quia primus oſtiarius 2 reddidit. qua ratione relinquuntur 14. & quoniam primo oſtiario furti dimidium oblatum eſt, ea duplicentur, & prodibunt 28: qui numerus vniuerſos aureos ſurreptos capit. Vt autem probemus non erraſſe calculum, conuerſo ordine numerum hunc ad furis exemplum diſtribuamus: & de 28 primo oſtiario dimidiū, quod eſt 14, offeramus. is nobis reddat 2, & fient 16. Horum dimidium ſecundo oſtiario demus, nempe 8, qui nobis 4 reſtituat: ſic habentur 12. Eorum deinde dimidium quod eſt 6, tertio ianitori offeramus. is 6 reddat, & rurſus fient 12, quæ ex vniuerſo furto reſtabant. Ad eundem modū res explicabitur, ſi cuipiam inueſtigare libet quantum ſibi quiſque oſtiarius retinuit. Liquet nāque primum oſtiarium 12 ſibi ſeruaſſe, ſecundum 4, tertium ianitorem retinuiſſe nihil.

Quæſtio XLV.

QVANDO rotæ linea dimetiens, quam Græci diametron vocant, ſeptem pedes habet, quantus erit ambitus apſidis extremæ, & quoties in mille paſſibus rota circunuoluetur? In primis obſeruare oportet geometrica ratione ab Archimede deprehenſum eſſe, diamertum tertiam circuli partem & tertiæ paulominꝰ ſeptimam comprehendere. Nam dimetiens (vt ille ait) ſi in partes ſeptuageſimas ſecetur, capit vltra tertiam circuli partem, minus quàm decem ſeptuageſimas, quæ partem ſeptimam faciunt. At ſi in ſeptuageſimas primas diuidatur, vltra tertiam circuli partē plus capit quàm decem ſeptuageſimas primas, quæ partes ſunt ſeptuageſimis minores, nec ſeptimā partem implent. Propius accedere non potuit Archimedes, tametſi multa conatus, vt diametri ad circulū

rationem inueniret: quæ ſi comperta eſſet, iam quadratura circuli fuiſſet inuenta : quam aſſequi deſperarunt plerique omnes philoſophi qui adhuc fuerunt, & in primis Ariſtoteles ipſe. Vltra Archimedem penetrare nemo hactenus potuit. Itaque cũ omnis circulus ter diametrum & diametri paulo minus ſeptimam colligat, (ſed quãtulo minus, adhuc non ſit compertũ) illud faciamus quod Geometræ ſolent, vt pro ſeptima, cui paululum deeſt, ſeptimã ſumentes integram, perinde cõputemus ac ſi dimetiens tertiam circuli partem, & tertiæ ſeptimã capiat. Qua ratione ſi extremæ apſidis ambitum ex diametro colligere velimus, multiplicare oportet ſeptem, qui numerus eſt diametri, in tria, & numero producto addere vnam ſeptimam. ita fient vigintiduo. quæ ratio erit apſidis rotæ ad diametrum: & tot pedes vna circumuolutio capiet. Quod poſtquam exploratũ eſt: per numerum illum 22 ſecare oportet illum pedũ numerum, quẽ mille paſſus continent. is autẽ eſt quinque millia. (nã paſſus, vt ait Columella, quinque pedes habet) Quo fiet, vt ſectionis numerus $227\frac{6}{22}$ proferat, quæ faciunt $\frac{3}{11}$. Toties ferè circunuoluetur rota in mille paſſibus. Propius id ſciri nõ poteſt propter certam diametri ad circulum rationem adhuc incõpertam. Et vix tandẽ in immenſo ſpatio deprehendi poteſt error.

Quæſtio XLVI.

QVIS non putaret normæ fabricandæ artificium delegandum eſſe fabris? at emendatæ normæ faciendæ ratio tota pendet à numeris: quã Pythagoras inueniſſe traditur. Ea autem eſt huiuſmodi. Porrò ſi ſumãtur regulæ tres, è quibus vna longa ſit pedes tres, altera pedes quatuor, tertia pedes quinque : hæque regulæ inter ſe cõpoſitæ ſummis cacuminibus alia aliam tangant, trigoni habebunt ſpeciem, & normam emendatam formabunt. Nam ſecũdum Euclidis regulã, vbi quod ab vno triãguli latere in ſeipſum ducto producitur, æquale reperitur duobus quadratis, quæ à duobus reliquis lateribus deſcribuntur, rectus eſt angulus cui latus illud opponitur. Itaque ſi huius trigoni ſingula latera in ſeipſa multiplices, numeróſque ita procrees quadratos: qui ex his maximus erit, tantum in ſe continebit, quantum duo reliqui quadrati ſimul additi: quippe tria in ſe ducta educunt nouẽ: quatuórque item in ſe multiplicata ſexdecim : qui numeri in vnũ additi vigintiquinque proferunt. At ſi quinque in ſeipſa ducantur (quod latus è tribus maximum eſt) itidem enaſcentur viginti quinque : qui numerus

æqualis eſt duobus quadratis reliquis. Id Pythagoras cũ inueniſſet,non dubitans ſe à muſis in ea inuentione adiutum,hoſtias his immolauiſſe dicitur. Ab illo igitur certa ratio normam fabricandi per numeros deprehenſa eſt:cum ante eum fabri normam faciẽtes vix magno labore rem ad verum perducerent. Nihil autem refert, quod menſuræ genus numeretur ab ipſis numeris normam efficientibus: nam ſiue vnciæ fuerint,ſiue palmi,ſiue pedes, ſiue cubiti,ſiue aliud quidlibet,eorũ ſumma cacumina ſimul coeuntia normam deformabunt. Iam quod hi numeri primarij,tria,quatuor,& quinque,in quibus normæ ratio primum inuenta fuit,perficiunt: itidem id præſtabunt omnes numeri maiores eandẽ rationem habentes: cuiuſmodi ſunt triginta,quadraginta,quinquaginta: quorum qui maximus eſt,in ſe ductus quadratum producet æqualem duorum reliquorum quadratis.

30	40	900	50
30	40	1600	50
900	1600	2500	2500

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM QVARTVM PRAEFATIO.

QVI in numerorum abdita penetrare volet, proportionibus dinoſcendis operam dare debet: quarum non ſolum in numeris, verumetiam in tota rerum natura tanta vis eſt, vt ſine ea nihil vel ad vſus hominum vtile, vel ad aſpectus amœnum, reperiri poſſit: id quod, quocunque oculos tuleris, facile intelligas. Principio quæ ad habitationem noſtram ædes fabrefactæ ſunt, niſi laxitatē longitudini atque altitudini cōgruentem habeant, inamœnæ & incōmodæ ab omnibus exiſtimantur. Si nimis ſunt luminoſæ, prærterquam quòd ſub dio habitare videmur, ad frigora arcenda tēpeſtateſque ferēdas inutiles putātur. Si lumina in his vel anguſta ſunt, vel rara, carceris ſpeciem referunt. Si parietes nimium craſſi, caſtella videntur. Cōtra ſi nimium tenues, parum tutas à furibus credimus. Ita niſi ſingulæ ædium partes ſibi proportione reſpōdeant, earū gratia tota perit. Pictorū verò ars tota, quæ ad hominū oblectationem inuenta, magnóque in pretio apud veteres habita eſt, nihil præſtabit gratū, ſi quæ illuſtrari deberent, fuſcis obſcurētur coloribus: ſi quæ obſcurari, fiant illuſtria: ſi in corpore depingendo mēbra alia enormia, alia exilia inter ſe nō conſentiant. quippe riſum, nō voluptatem irritus labor pariet. At ſi colores floridi tēperentur auſteris, candidi fuſcis, fulgentes vmbroſis, vt quæ longinqua ſunt, receſſiſſe videātur: quæ propinqua, ſic emineāt, vt extare videri poſſint: ſi vniuerſa lineamenta ſibi pro portione cōſentiant, neminem non ea ars ſummopere delectabit. Qui diſciplinæ militari dant operā, & arma corporibus, & tela tormentis habilia quærunt. Qui claſſem ædificant, armamēta pro nauium parāt magnitudine. Sarcinatores qui veſtimenta faciunt, ſic ea aptare ſtudent, vt corporū ſeruent ſymmetriam. Cætera itidē artificia proportionum cognitionē vniuerſa poſtulant. Quid medici, qui pharmaca dant ægrotis? an non eorum ſumma cura eſt, vt poſtquam morbi vim ſagaci ſolertia deprehenderūt, ſic calida frigidis, ſic humida ſiccis miſceāt, vt ægroti corporis temperamento cōueniant? id quod ignoratis proportionibus fieri nequaquam poteſt. Ipſa etiam ciborum noſtrorum condimenta, dum ſani ſumus, niſi ſalſa recentibus, acria dulcibus, auſtera lenibus temperentur, ingrata palato, atque inſipida comperiemus. Ita nec corporis humani ſanitas incolumis ſeruari, nec labefactata refici, ſine proportionū no-

titia facile poterit: vt non abs re exiſtimari poſſit, corpora noſtra non magis ex quatuor elementis,quàm eorũ proportione cõſtare. Denique omniũ opifex deus & mũdi fabricæ & rebus in ea creatis vniuerſis eam formã dedit, vt cuncta inter ſe ſymmetriã tenerent:id quod in ſingulis licet cernere,ſiue cælum,ſiue terram ſpectes. Quocirca ſacræ literæ,menſura,numero,& pondere, quibus in rebus maxime vis proportionũ eminet,deum omnia diſpoſuiſſe teſtantur.Et ne in confirmandis his quæ in confeſſo ſunt, longius immoremur:cum palàm ſit nihil vſquã vel aſpectu decorum, vel vſu gratũ eſſe,cui deſit proportio:propterea cognitionem eius ad vitam tranſigendã operæpretium erit expetere. Quod cum ad cætera negotia cõmodius gerenda,tum præcipue ad artem ſupputandi diſcendam,plurimũ conducet:in qua ſine proportionũ notitia nihil arduũ explicari poteſt. Igitur in hoc libro genera proportionum paulo altius in primis repetere eſt animus . Deinde earum ſubijciemus additionem , ſubductionem , multiplicationẽ & ſectionem. Poſtremo regulas quaſdã ad ſupputationem vtiles, quæ ſine his ne intelligi quidem queunt,ſtudioſis prodemus.

QVANTITATIS SPECIES.

QVANTITATVM ſpecies duæ reperiuntur. altera continua eſt,quæ magnitudo dicitur.altera diſcreta, quæ ſiue multitudo,ſiue numerus appellatũ. Ipſa etiã magnitudo ſpecies habet duas: altera eſt immobilis, quã Geometria tractat: altera mobilis,de qua Aſtrologia cõſyderat.Itidẽ multitudinis duæ ſpecies occurrunt.earũ altera per ſe cõſyderatur, de qua diſſerit Arithmetica: altera refertur ad aliud:eã muſica pertractat.Numerus verò eſt vnitatũ collectio.

De Proportione & eius generibus.

PROPORTIO eſt duarum, quantæcunque ſunt, eiuſdem generis quantitatum,certa alterius ad alteram comparatio, atque habitudo.propoſitis nanque quibuſuis duabus quantitatibus, neceſſe eſt alteram altera vel maiorem, vel æqualem, vel minorem eſſe. Illa itaque habitudo qua ſeſe vel æqualiter,quando ſunt æquales, mutuo reſpiciũt:vel inæqualiter,quando earum altera maior reliqua,aut minor eſt,appellatur proportio:quæ nihil aliud eſt,quàm earum inter ſe comparatio. Eiuſdem quoque generis quantitates

eſſe debent,inter quas cadit proportio. veluti duo numeri,duæ lineæ,duæ ſuperficies,duo corpora, duo loca, duo tempora: neque enim linea maior aut minor ſuperficie eſt, aut corpore, nec tempus loco maius eſt, aut minus: ſed lineā lineā,ſuperficies ſuperficie,corpus corpore: ſola enim quæ vnius ſunt generis,inter ſe cōparabilia ſunt. Proportio autem habitudo certa eſt: quaſi diceres, ſic determinata,vt hæc ſit,& non alia. Neque enim neceſſe eſt vt omnis duarum quātitatum habitudo vel à nobis ſciatur , vel à rerum natura. Quippe proportio apud veteres in tria ſecatur genera:quorum vnum eſt diſcretorum,videlicet numerorum,quod vocant Arithmeticum. Alterum continuorum,quod Geometricum appellant. Tertium ſonorū & cōcentuum, quod harmonicū nuncupant,ex illorum vtroque mixtū: quòd muſica in pauſis & prolationibus tempus ſpectet: in vibrante vocum notarúmque diuiſione,numeros. Et quia ad inſtitutum noſtrum tertium hoc genus non attinet,parum admodū in hoc libro de eo dicturi ſumus. In numeris autē omnis minor eſt pars aut partes maioris: quamobrem in eis omnibus certa eſt habitudo & nota. At verò in continuis proportio eſt magis larga. Nonnunquam enim in eis minor quantitas eſt pars aut partes maioris:& taliū omnium,interuenientibus atque adiuuantibus numeris,nota eſt proportio, quæ & rationalis vocatur. Huiuſmodi autem quantitates ſiue cōmunicantes,ſiue cōmenſurabiles dicuntur: quia eas vna & eadem quātitas neceſſario metitur. Quo fit vt omnes numeri ſint communicātes, quòd omnes eos metiatur vnitas. Sæpenumero autē in continuis minor quantitas nō eſt pars aut partes maioris: & in talibus proportio neque nobis nota eſt,nec naturæ: qualis eſt inter quadrati diametrum & eius coſtam,cum nulla vnquam menſura,quæ vtrique ſit cōmunis,inueniri poſſit, tametſi diametri quadratū duplū ſit ad quadratum coſtæ. Huiuſmodi autem proportio irrationalis nuncupatur,& hæ quantitates incōmunicantes, ſiue incōmenſurabiles. Vnde fit vt quæcunque proportio occurrit in numeris,eadem reperiatur in omni genere continuorum : puta in lineis, ſuperficiebus,corporibus,& temporibus. At non ē cōuerſo idem accidet. Infinitæ nanque reperiuntur in cōtinuis proportiones,quas numerorum natura non ſuſtinet. Cæterum quæcūque proportio in vno genere cōtinuorum accidit, eadem comperietur in omnibus aliis. Nam qualitercunque ſe habet aliqua linea ad quamlibet aliā,ſic ſe habet quælibet ſuperficies ad aliquā aliam,& quodlibet

m.iſ.

corpus ad aliquod aliud,ſimiliter & tempus:non autem ſic ſe habet quilibet numerus ad aliquẽ alium. Quocirca in cõtinuis proportio magis larga eſt,quàm in diſcretis.Quo fit manifeſtum,proportionem Geometricã maioris abſtractionis, quàm Arithmeticã eſſe. Omnes enim proportiones, circa quas Arithmetica verſatur, rationales ſunt:de quibus hoc libro maxime dicturi ſumus. Geometria verò & rationales & irrationales æqualiter conſyderat.

Proportionis rationalis ſpecies.

PROPORTIONIS rationalis ſpecies ſic dignoſces. Omnis quantitas ad aliam cõparata aut ei æqualis, aut inæqualis reperitur.Quantitas æqualis eſt quæ nec ſibi cõparatã excedit,nec ab ea exceditur.veluti cubitus ad cubitũ collatus:pes ad pedẽ:numerus quaternarius ad quaternariũ.Inæqualis autẽ quãtitas,quæ ſibi cõparatã excedit,proportionẽ ad illam habet inæqualitatis maioris: veluti cubitus ad pedẽ,numerus quaternarius ad binarium.Quòd ſi ab illa exceditur, minoris ad illam inæqualitatis proportionem habet:veluti pes ad cubitũ:numerus binarius ad quaternarium.

MAIORIS verò inæqualitatis ſpecies ſunt quinque,quarũ tres ſunt ſimplices,videlicet multiplex,ſuperparticularis, & ſuperpartiens.Duæ verò reliquæ compoſitæ,nempe multiplex ſuperparticularis & multiplex ſuperpartiens,ex prima & duabus reliquis cõſiciuntur.Quibus rurſus aliæ quinque ſpecies inæqualitatis minoris opponuntur:quæ eadem ſeruant nomina,præterquã quòd præpoſitio hæc(ſub) in ſingulis nominibus apponitur, vt ſubmultiplex,ſubſuperparticularis,ſubſuperpartiens,& ſic deinceps.

PORRÒ vt de primis quinque ſuo ordine dicamus, Quantitas ad aliam multiplex eſt,quæ eam pluries integram continet. Et ſi bis eam capit,dupla dicitur:ſi ter,tripla: ſi quater,quadrupla: ſicque in infinitas ſpecies variatur. Vt igitur ſciatur quomodo ſingulæ eius ſpecies generantur, facta numerorum ſerie naturali, veluti 1.2.3.4.5.6.7.8.9.quilibet eorum, qui præcedentem per vnitatem ſuperat,ſub alia & alia ſpecie multiplex eſt ad vnum: ſecundus enim duplus eſt,tertius triplus,quartus quadruplus,& ſic deinceps. Et ſicut in infinitum in hoc naturali numerorum progreſſu ſpecies multipliciter variantur, ita etiam in qualibet ſpecie generari poſſunt infiniti numeri.

DVPLORVM in primis generatio huiuſmodi eſt, Sicut enim primus numerus par,videlicet binarius, duplus eſt ad vnitatẽ, ita

ſecundus par qui eſt quaternarius,ad binarium numerum duplus erit:& tertius par,qui eſt ſenarius,ad ternariū: quartus par,qui eſt octonarius, ad quaternarium:quintúſque par,qui eſt denarius, ad quinarium numerum duplus erit: & ſic deinceps in infinitum in generatione duplorum progreſſus fieri poteſt.

TRIPLORVM autem generatio ſic obſeruatur, In naturali numerorum ſerie poſt ternarium,qui vnitati triplus eſt, duobus intermiſſis,puta quaternario & quinario,ſenarius qui ſequitur, triplus ad ſecundum numerum naturalis ſeriei binarium comperietur. Iterū etiam omiſſis alijs duobus, videlicet ſeptenario & octonario peruenietur ad nouenarium,qui triplus eſt tertij numeri.Et rurſus 10 & 11 intermiſſis, duodenarius triplus erit ad quartū numerum: ad quē modum ſine fine progredientes, triplos inueniemus.Erítque triplorum cōtinue vnus impar,alius par alternatim.

QVADRVPLORVM verò generatio incipit, ſiquis poſt quaternarium tres numeros, veluti quinarium, ſenarium & ſeptenarium intermittat.quartus enim occurrit octonarius, qui ad binarium numerum,qui ſecundus eſt,quadruplus reperitur.At rurſus 9. 10. & 11 intermiſſis,duodenarius numerus ternarij numeri,qui tertius eſt,quadruplus erit:& ſic deinceps. ſinguli autem quadrupli numeri ſunt pares,ſicut in duplis euenit.

Similiter ſi quatuor numeros intermittas, quintupli inueniuntur:ſi quinque,ſextupli: ſi ſex,ſeptupli: atque ita ſemper proportionis generandæ denominatio per vnitatē ſuperabit numeros omittendos. Omnium autem numerorum multiplicium, quorum denominatio eſt impar,vnꝰ par & alius impar alternatim erit: ſed multiplicium,quorum denominatio eſt par,ſinguli pares erunt.

QVANTITAS ſuperparticularis ad aliam dicitur, quæ ſemel eam continet,& aliquam eius partem. Et ſi eam & eius dimidium continet,vocatur ſeſquialtera:ſi eam & eius tertiam,dicitur ſeſquitertia:ſi eam & eius quartam, erit ſeſquiquarta: & ſic in infinitum nomina ducere licet.In comparatione tali numeri maiores dicuntur duces,minores verò comites.Generantur autem ſuperparticulares proportiones ad hunc modum.

Et primum quidem de ſeſquialteræ origine dicamus.Diſpoſitis vno ordine ſingulis numeris tertiam partem habentibus, qui per continuam additionem ternarij in infinitum procedunt, ſicuti 3. 6.9.12.15.18.omnes duces procreabuntur proportionis ſeſquialteræ: quibus ſi ſinguli numeri pares ſua ſerie ſubſcribantur,proue-

nient omnes eiuſdem proportionis comites, ſi primum primo, ſecundum ſecundo conferamus: & ſic deinceps.

3.6.9.12. 15.18.21.
2.4.6.8. 10.12.14.

ITEM diſpoſitis ſingulis numeris quartam partem habẽtibus, qui per quaternarij continuam additionem procreantur, veluti, 4.8.12.16. prodibunt omnes duces proportionis ſeſquitertiæ, qui omnes numeros triplos ſiue tertiã partem habẽtes comites habebunt, ſi primus primo, ſecũdus ſecundo cõparetur: & ſic deinceps.

4.8.12.16.20.
3.6. 9.12.15.

SIMILITER generatur proportio ſeſquiquarta, ſi ad ſingulos quadruplos ſinguli quintupli comparentur.

5.10.15.20.
4.8.12. 16.

Atque ita deinceps procedetur per proportionis ſuperparticularis ſingulas alias ſpecies.

ACCIDIT autem proportioni ſuperparticulari admirãda hæc proprietas, vt in quibuſcunque numeris huius ſpeciei primus dux primum comitem per ſolam vnitatem tranſcendat, ſecundus ſecundum per binarium, tertius tertium per ternarium, & ita deinceps per ordinem fit aſcenſus. Poteſt autem tabella depingi, in qua proportionum tam multiplicium quàm ſuperparticularium, quotquot voluerimus, ſpecies generentur. Cuius formam ſuprà libro primo de numerorũ multiplicatione præcipientes deſcripſimus. Hic autẽ iterum eã oculis ſubijcere putamus operæpretium.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

IN HAC tabellæ formula ſecundum longitudinem & latitudinem eadem eſt numerorũ progreſſio. Itaque ſi ſecundus ordo ſiue in longitudine ſiue in latitudine ad primum cõparetur, accidit continua generatio primæ multipliciũ ſpeciei, videlicet duplorũ: ſi enim 2 ad 1, aut 4 ad 2, aut 6 ad 3, & ita vlterius comparemus, prouenit vbiq; dupla proportio: vnde & in iſta proportionis ſpecie, primus dux primum comitem per ſolam vnitatem ſuperat, ſecundus ſecundum per binarium, tertius tertium per ternarium, & ita per ordinem fit aſcenſus. Itidem ſi tertius ordo ad primũ conferatur, generabitur ſpecies tertia multiplicium, nempe proportio tripla: ſuperabítque primus dux primũ comitem per binarium, ſecundus ſecundũ per quaternarium, & ita per incrementum binarij continue fit progreſſus. Ad hæc ſi quartum ordinem compares ad primum, quadruplorum generatio proueniet: & primus dux primum excedet comitem per ternarium, ſecundus ſecundum per ſenarium, & ita per additionem ternarij cõtinua fit accumulatio: ſicque per ſingulas multiplicium ſpecies procedere in infinitũ licet.

Generatio verò ſuperparticularium ad hunc modum cōſyderabitur, Si enim tertium ordinem cōparemus ad ſecundū, accidet procreatio continua proportionis ſeſquialteræ. Item ſi quartū ordinē ad tertium cōferamus, prodibit proportio ſeſquitertia: ſi quintum ad quartum, ſeſquiquarta generabitur. Et ita per ordinem ſingulæ ſuperparticulariū ſpecies procreãtur: ſuperabitq; in omni eius ſpecie primus dux primū comitem per vnū, ſecundus ſecundū per 2, tertius tertium per 3, & ſic deinceps: queadmodū in duplis euenit.

ACCIDVNT autem prædictæ formulæ proprietates admirandæ quinq; quarū prima hæc eſt, Numeri iſtius formulæ ab vnitate angulariter ſecundū quadrati diametrū deſcendentes, puta 1.4.9.16, atque ita deinceps, ſinguli ſunt quadrati: ſicq; ad ſingulos quadratos deuenire licet, ſurgentes ex numerorū ductu in ſeipſos. Secunda formulæ huius proprietas eſt: ſinguli eius numeri longilateri ſunt, qui immediate numeros angulares circuncingunt. Sunt autem numeri longilateri, qui ex duorum numerorū ductu, vnius in alterū producuntur, quorum vnus alterū ſola vnitate ſuperat. Veluti circa 4 ſunt 2 & 6 : quorū binarius ex ductu vnitatis in 2, & ſenarius ex ductu 2 in 3 procreatur. Similiter circa 9, ſunt 6 & 12: ſicque per ordinem inuenies omnes numeros longilateros, circa numeros angulares. Tertia huius formulæ proprietas eſt, Si duo numeri alicui numero angulari circūpoſiti coniunctim addantur ad duplū ipſius numeri angularis, ſurget numerus quadratus. veluti additis 2 & 6 ad bis 4, prodeunt 16. Quarta proprietas eſt, Si duo quadrati angulares proximi ſimul addantur ad duplum numeri ab ipſis circunſepti, numerus naſcetur quadratus. nam additis 4 & 9 ad bis 6, producūtur 25. Quinta proprietas eſt, Vbicunque in hac formula reperitur aliqua figura quadrata, idem ex ductu angulorum oppoſitorū in oppoſitos producetur: puta ſi 4 in 9 ducas, aut 6 in 6 (nam idē vtrobique exibit) vel ſi 3 in 15 ducas, aut 5 in 9, idem producetur. Multa alia admiranda atque vtilia in hac tabellæ formula reperiri poſſunt, qualia ſunt ea quæ de multiplicatione & diuiſione per eam facienda, primo libro monſtrauimus. Verum his omiſſis, ad propoſitum reuertamur.

QVANTITAS ad aliam ſuperpartiēs dicitur, quæ ipſam ſemel intra ſe capit, & inſuper aliquot eius partes, de quibus ſimul ſumptis nō fit maioris quātitatis pars vna aliquota: quæ ſpecies tā ex numero partiū ſuperfluentiū, q̄ ex earū denominatione variatur in infinitū. Ex numero partium, Veluti ſi numerus maior minorem

continet & eius partes duas,dicitur ſuperbipartiẽs:ſi verò eam capit,& tres eius partes,ſupertripartiẽs dicitur.& ſic deinceps. Item ex denominatione partium, puta ſi maior minorem ſemel cõtinet & duas eius partes, quarum quælibet tertiam facit, vocatur ſuperbipartiens tertias,vel magis germano vocabulo ſuperbitertius. & ſi minorem includit,& tres eius partes,quarũ quælibet quarta eſt, dicitur ſupertripartiens quartas, vel magis ſupertriquartus. neque in tali progreſſu ſtatus aliquis erit. Huiuſmodi autem porportio, vbi tam numerus partium quàm earũ denominatio variatur,continue generari poteſt, ſi ſeries vna numerorum fiat à ternario incipiens, & quantumuis vlterius ſecundũ ordinem naturalem procedens. Deinde fiat alia ſeries:in qua ſumpto initio à quinario numero,ſinguli ſequentes impares per ordinem ſubſcribantur.

3.4.5. 6. 7. 8. 9.10.11.12.
5.7.9. 11. 13.15.17.19.21.23.

Nam ſi primum ordinis inferioris ad primum ſuperioris conferamus,proportio orietur ſuperbipartiẽs tertias, ſiue ſuperbitertia: ſi ſecundum ſecundo, ſupertripartiens quartas, ſiue ſupertriquarta. & ſic ſine fine. Quòd ſi ſingulos vtriuſque ſeriei numeros duplicemus,ſecundi numeri prodibunt ſub eiſdem proportionibus conſtituti. ſunt enim 10 & 6 ſecundi numeri, inter quos eſt ſuperbitertia proportio.Similiter ſi duplicemus duos ſecũdos, fiũt 8 & 14 qui ſunt ſecũdi numeri,inter quos cadit ſupertriquarta proportio:& ſic deinceps. Itidem ſi vtriuſque ſeriei numeros triplicemus:tertij numeri naſcentur proportionem eandem vendicantes. vt 15 ad 9,21 ad 12. & ſic in infinitum progreſſus fieri poteſt per ſingulas ſpecies.Ex hoc Arithmetici deprehẽdũt hic dormitaſſe Boetium non incelebrem authorem,qui in generatione continua huiuſmodi numerorum dicit ſecũdum ducem & ſecundũ comitem, inter quos eſt proportio prima ſupertriquarta,debere triplicari: & tertium ducem & tertium comitẽ, inter quos eſt proportio ſuperquadriquinta, quadruplicari, & ita deinceps: vt per hoc naſcantur ſecundi numeri ſub eiſdem proportionibus conſtituti. Male etiam hic admonet numeros triplicatos iterum triplicari debere, quadruplicatos iterum quadruplicari,vt cæteri numeri ſub eiſdem proportionibus procreentur. Præterea Boetius in generatione ſuperpartientium de his tantum admonuit, in quibus denominatio partium per vnitatem ſolam numerum earundem ſuperat: veluti de ſuperbitertia,ſupertriquarta,ſuperquadriquinta,& huiuſmodi:

nec docet quomodo ſuperbiſeptima vel aliæ huiuſmodi generentur. Et ideo vt de cuiuſlibet ſpeciei generatione inſtruamur, capiamus numerū denominantē partes proportionis propoſitæ: qui numerus erit primus comes proportionis illius. cui deinde addamus numeratorē partiū proportionis eiuſdē, ſic procreabim⁹ primū ducem. Verbi gratia. ſi proportio ſupertriſeptima generanda proponatur, capimus 7. cui ſi addamus 3, prodibūt 10. ſunt itaque 10 & 7 minimi numeri, inter quos ꝓportio ſupertriſeptima reperitur. quibus duplicatis, exeūt numeri ſecūdi eiuſdē proportionis: & triplicatis, fiūt tertij. id quod per hāc regulam fit manifeſtum: videlicet, quia multipliciū & ſubmultiplicium proportio ſemper eſt eadem.

QVANTITAS multiplex ſuperparticularis ad aliam dicitur, quæ eam pluries quàm ſemel & aliquam partem eius aliquotam continet: & hoc variatur tam ex parte multiplicis, veluti dupla ſuperparticularis: quàm ex parte ſuperparticularis, vt dupla ſeſquialtera, tripla ſeſquitertia. Vbi autem ſtāte denominatione ex parte multiplicium ſpecies ſolummodo ex parte ſuperparticularium variantur, ſicut in dupla ſeſquialtera, dupla ſeſquitertia: fiet eorum generatio per hunc modum, Diſponantur numeri à binario ſecūdum ordinem naturalem: quibus ſinguli impares à quinario ſubſcribantur. cōparātes itaque primum ad primum, habebimus proportionem duplam ſeſquialteram: ſecundum ad ſecundum, duplā ſeſquitertiam: tertium ad tertium, duplam ſeſquiquartam.

2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

Pro generatione autem triplorum ſuperparticularium fiat primus ordo vt prius: & in ſecundo ordine poſt initium à ſeptenario ſumptum, numeri continue per additionem ternarij augeantur.

2. 3. 4. 5. 6. 7.
7. 10. 13. 16. 19. 22.

At pro quadruplorum ſuperparticulariū generatione, ſtāte priori ordine, numeri in ſecundo à 9 ſumētes initium per additionem quaternarij continuè augeantur: & ita deinceps, quantuncunque voluerimus, procedemus. poſtquā verò in prædictis ordinibus numeri primi & minimi in ſuis proportionibus conſtituti ſunt, ſi eos duplicauerimus, numeri naſcentur ſecundi: ſi eos triplicauerimus, tertij, eiſdem proportionibus congruentes.

2. 3. 4. 5. 6. 7.
9. 13. 17. 21. 25. 29.

QVANTITAS ad aliam multiplex ſuperpartiẽs dicitur, quæ eam pluries quàm ſemel, & eius aliquot partes continet: ex quibus non fit maioris quantitatis vna aliquota: quæ ſpecies tam ex parte multiplicis, quàm ex parte ſuperpartiẽtis in infinitum variatur. Accidit autem huiuſmodi proportionis generatio ad hunc modũ, Propoſita quauis tali proportione, capiatur numerus denominans partes minoris numeri in eadem, vt ille ſit primus comes: deinde vel duplicetur, vel triplicetur ille numerus ſecundum denominationẽ multiplicis in illa proportione. taliſque numero ſic multiplicato addãtur vnitates ſecundũ numerum partiũ proportionis propoſitæ: & primus dux in ea proportione naſcetur comparãdus ad primũ comitẽ. Verbi gratia. in proportione tripla ſuperquintiſeptima capiantur 7. quibus triplicatis, & 5 ſuperadditis, ſurgent 26. Itaque 26 & 7, ſunt primi numeri ſub proportione propoſita conſtituti. Quibus duplicatis naſcentur ſecundi: triplicatis, tertij: & ita deuenire licet ad omnes numeros ſub ea proportione conſiſtentes. Annotandum autem eſt ſingulas ſpecies harũ quinque in formula quadrilatera ſuperius ſcripta inueniri poſſe, ſi in immenſum vlterius extendatur. Ad primum enim ordinem reliqui ſinguli cõparati ſingulas multiplicis ſpecies procreabunt. Item ſi tertium ordinem ad ſecundum, & quartum ad tertium, & ita vlterius conferamus, mille ſuperparticularium ſpecies orientur. Quòd ſi quintum ordinem ad tertium, & ſeptimum ad quartum, & nonum ad quintum comparemus, & ita progrediamur, habebimus ſingulas ſpecies ſuperpartiẽtium. Item ſi ſecundũ ordinem ad quintum, & ad ſeptimum, & ad nonum, & ita deinceps, contulerimus, multiplicis ſuperparticularis ſpecies variæ prodibunt. At multiplicium ſuperpartiẽtium procreabuntur ſpecies, ſi ad tertium ordinẽ octauus, & vndecimus, & quartusdecimus, atque ſecundum eam rationem alij referantur.

HAE quinque ſpecies, quæ iam ſunt deſcriptæ, alias etiam quinque, quæ ſibi ſunt oppoſitæ, manifeſtant. Etenim hoc tantum inter eas intereſt, vt cum per ſingulas has ſpecies maior numerus, ſicuti diximus, ad minorem comparetur: in illis contrà fiat, vt minor conferatur ad maiorem, atque ideo (ſub) præpoſitio ſingulis earum nominibus apponatur. Cæterum illarum generatio & harum eſt eadem.

DE PROPORTIONALITATE.

P ROPORTIONALITAS eſt proportionum inter ſe ſimilitudo. Ea autem bifariam ſecatur: altera nãque proportionalitas continua eſt, altera incontinua, quam eãdem ſeparatam appellare licet.

CONTINVA proportionalitas eſt, cũ quotlibet quantitatum eiuſdem generis, qua proportione prima antecedit ſecundam, eadem quælibet aliarum proximo conſequentem antecedit. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 4 ad 2, & 2 ad 1. Complurium autem quantitatum continue proportionalium quælibet & antecedens & conſequens eſt: hoc eſt, & vicem primi extremi in proportione & ſecundi ſupplet, excepta prima quæ ſolũ antecedit, & poſtrema quæ tantum cõſequitur. Et in hac quidẽ proportionalitate, propter cõtinuationẽ proportionũ, neceſſe eſt omnes quantitates eſſe eiuſdem generis: eo quòd inter diuerſorum generum quantitates non exiſtat proportio. Hæc verò proportionalitas in paucioribus quãtitatibus, quàm in tribus, inueniri nequit: quanquam etiam in illis media quantitas, dum bis repetitur, vicẽ ſubdit duarum.

INCONTINVA autem proportionalitas eſt, cũ quatuor quãtitatum, qua proportione prima antecedit ſecundam, eadem tertia antecedit quartam. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 6 ad 3. eritque earum quantitatum quælibet aut tantum antecedens, aut tantum conſequens. Et quia prioris proportionis extremum, quod conſequens eſt, non continuatur antecedenti, quod eſt prius extremum proportionis ſecundæ: neceſſe non eſt vt omnes quatuor ſint generis eiuſdem, ſicut in proportionalitate continua erat. ſed fieri poteſt vt ſint eiuſdem generis, & fieri poteſt vt ſint diuerſorum. Sicut enim lineam duplam aut triplam ad lineã reperiri contingit: ita ſuperficiem ad ſuperficiẽ, corpus ad corpus, tẽpus ad tempus, numerum ad numerũ. Hæc verò proportionalitas in paucioribus quãtitatibus, quàm in quatuor inueniri nequit.

PORRÒ in proportionibus extrema ipſa ſiue antecedunt, ſiue conſequuntur, termini ab Arithmeticis nuncupantur.

QVANTITATES autem, quarum proportio eſt ſimilis, proportionales vocantur.

O MNIS autem porportionalitas, ſiue continua ſit, ſiue ſeparata, ſex modis inter argumentandum variari poteſt.

Quantitates enim inter quas ſimilitudo eſt proportio-

num, itidem ſimilium proportionum erunt, etiam ſi comparatio quæ ab antecedente quantitate ad conſequentem facta erat, econuerſo à conſequente ad antecedentem fiat. Quæ proportionalitas, cōuerſa nuncupatur, quòd quantitates antecedentes in cōſequētes & cōſequētes in antecedentes cōuertantur. Exemplū demus in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 6 ad 3. eadem etiā ſimilitudo è cōuerſo eueniet: vt ſicut 4 ſe habent ad 8, ſic 3 ad 6 ſe habeant.

IN quantitatibus ſimilium proportionum, quando earum antecedentes ad ſuas conſequentes comparãtur, proportionum omnino ſimilitudo cadet: etiam ſi permutatim quantitas vnius antecedens ad alterius antecedentem, & conſequens vnius ad alterius conſequentem conferatur. Quæ proportionalitas, permutata vocatur: in qua antecedens proportionis ſecundæ fit conſequens primæ: & conſequens primæ fit antecedens ſecundæ. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 6 ad 3. Quare etiā permutatim, ſicut 8 ſe habent ad 6, ſic 4 ad 3. Ex quo videre licet in permutata proportionalitate id euenire, vt ambo extrema primæ proportionis fiant antecedentia, & ambo extrema ſecundæ conſequentia.

CONIVNCTA verò proportionalitas dicitur, quoties ſicut vnius proportionis quantitas antecedens cum ſua conſequente cōiuncta ſe habet ad ſuam conſequentem: ſic etiam alterius proportionis quantitas antecedens cum ſua conſequēte coniuncta ſe ad ſuam conſequentem habet. Quæ coniuncta proportionalitas ex ſimilitudine proportionum infertur. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habēt ad 4, ſic 6 ad 3. Quocirca ſicut 8 & 4 coniuncta, ſe habent ad 4: ſic 6 & 3 coniuncta, ſe habent ad 3.

DISIVNCTA proportionalitas eſt, in qua de quantitatibus cō iunctis ad cōſequētes ſuas collatis, comparationis illatio fit etiam ad diuiſas. Exēplū in numeris. ſicut 8 & 4 ſe habēt ad 4: ſic 6 & 3 ſe habēt ad 3. Quamobrem etiam ſicut 8 ſe habent ad 4: ſic 6 ad 3.

EVERSA proportionalitas eſt, quando ſicut vnius proportionis quantitas antecedens cum ſua conſequente coniuncta ſe habet ad ſuam antecedentem, ſic etiam alterius proportionis quantitas antedecens cum ſua conſequente coniuncta ſe ad ſuam antecedētem habet. Quæ proportionalitas euerſa ex proportionum ſimilitudine, & aptiſſime ex proportionalitate coniuncta inferri poteſt. Exemplum in numeris. ſicut 8 & 4 ſe habent ad 4: ſic 6 & 3 ad 3. Quo fiet vt ſicut 8 & 4 ſe habent ad 8, ſic 6 & 3 ad 6 ſe habeant.

AEQVA proportionalitas eſt, quãdo plures quãtitates in vnã

proportionem ex parte vna ſumuntur:atque aliæ totidem vel eiuſdem generis,vel alterius ex parte altera ſecũdum eandem proportionem applicantur: & mediorum æquali numero remoto,ſimilitudo proportionum in extremis infertur. Exemplum in numeris. ſicut 8 ad 4,& 4 ad 2 ſe habent:ſic 12 ad 6,& 6 ad 3. Quamobrẽ ſicut 8 ad 2 ſe habent, ſic 12 ad 3 . Idem erit etiam ſi comparationis ordo conuerſus atque intermixtus fuerit. veluti ſi dicatur, ſicut 8 ad 4, ſic 12 ad 6:& ſicut 4 ad 2,ſic 6 ad 3. Quocirca ſicut 8 ad 2, ſic 12 ad 3. Proportionalitatum alia etiam diuiſio eſt, quæ ex medietatibus mox enarrandis apparebit.

DE MEDIETATIBVS.

MEDIETAS eſt connexio quædam extremorum per habitudinem vtriuſque ad medium.Sic enim à pleriſque veteribus appellatur, quæ alio nomine proportionalitas vocatur ab Euclide. Medietatum autem tria genera Pythagoras,Plato, Ariſtoteles,& plerique omnes veteres poſuerunt : alias enim medietates Arithmeticas eſſe voluerunt,alias Geometricas, alias harmonicas:de quibus ſingulatim ordine dicemus.

ARITHMETICA medietas eſt,quando maximi medij & minimi differentiæ ſunt æquales. id eſt, vbi proportionis æqualitate neglecta,æqualis inter terminos differentia cuſtoditur:ſiue in numerorũ ordine naturali, vtpote 1.2.3.4:ſiue æquales numeri cõtinue ſint omiſſi,ſicut 1.4.7.10. Si enim vnũ omittas,differentia erit 2:ſi 2, differentia erit 3: ſi 3,differentia erit 4,& ſic deinceps.Differẽtia verò appellatur exceſſus ille numeri,quo maior numerus minorem ſuperat.

Huius autem medietatis proprium illud eſt , Maximi ad mediũ non eſt eadem proportio quæ medij ad minimũ, ſed medij ad minimũ proportio ſemper maior eſt quàm maximi ad medium.Quo fit vt in minoribus numeris ꝓportio ſemper maior ſit, & in maioribus minor. Verbi gratia.inter 8 & 4 ſecundũ iſtã medietatẽ medius eſt ſenarius.differẽtiã vtrobiq; numerus binarius facit. At maior eſt proportio medij ad minimũ,videlicet 6 ad 4,quæ eſt ſeſquialtera,quàm maximi ad mediũ,videlicet 8 ad 6,quæ eſt ſeſquitertia.

Alia eius proprietas eſt,Si huiuſmodi proportiones in tribus terminis diſponantur, extrema ſimul addita tantum facient, quantũ medium duplicatum. ſicut 6.4.2:è quibus bis 4, faciũt 8. itémque 6 & 2,faciunt 8. Quòd ſi in quatuor terminis ponantur,tunc duo media per additionem coniuncta tantum efficient, quantum duo

extrema ſic iuncta. vt ſi ponantur 8.6.4.2. tantum enim creant 6 addita ad 4, quantum 8 ad 2 addita. Ex hac proprietate ſumi poteſt ratio generalis progreſſionis ſuprà in integris poſitæ.

Rurſus alia eius proprietas eſt, Si hac medietate conſtituta in tribus terminis prius multiplicentur extrema, deinde medium per ſe ipſum, id quod proueniet ex medij ductu in ſeipſum: tantum ſuperabit id quod ex multiplicatione extremorum prodibit, quãtum producetur ex alterius differẽtiæ in alteram ductu. Exemplum in his terminis 2.4.6. Sicut 2 ſe habẽt ad 4, ita 4 ad 6. bis 6 faciũt 12. quater 4 creant 16, quæ per 4 excedunt 12. Qui exceſſus etiam prouenit ex ductu differentiarũ in ſe. differẽtia enim vtraque eſt 2. bis autem 2 faciunt 4. Eodem modo ſi termini 4 ponantur, & multiplicatis extremis alterum mediũ in alterum ducatur, id quod proueniet ex alterius medij in alterũ ductu: tantum ſuperabit id quod ex multiplicatione extremorum prodibit, quãtum producetur ex multiplicatis differentijs duabus, quæ ſunt inter alterutrum illorum mediorum & extrema. Veluti ſi eſſent 2.4.6.8. bis 8 creant 16. quater 6 faciũt 24: quæ per 8 excedunt 16. Idem autem exceſſus ex multiplicatione differentiarũ, quæ ſunt inter alterutrũ illorũ mediorum & extrema, producetur. nam ſi de duobus medijs id quod prius eſt capias, videlicet 4: differẽtia inter prius extremũ & ipſum mediũ eſt 2: & differentia inter ipſum & poſterius extremũ eſt 4. itaque differentiæ ipſæ 2 & 4 in ſe ductæ, procreant 8. Similiter ſi de duobus medijs id quod poſterius eſt, ſumas, videlicet 6: differẽtia inter ipſum & primum extremũ eſt 4: & differẽtia inter ipſum & ſecundum extremũ eſt 2. quæ differentiæ in ſe ductæ creant 8.

GEOMETRICA medietas eſt, quando maximi ad mediũ eadem eſt proportio quæ medij ad minimũ. In qua medietate differentiarũ æqualitate neglecta, proportionũ æqualitas obſeruatur, ſicut cernere licet in his numeris 4.6. 9. vbi medius numerus eſt 6. Secũdũ hãc medietatem multo aptius proportionalitas appellatur, quàm ſecũdum Arithmeticam. Etenim in illa proportionalitas ſecundum exceſſum intelligitur per æquales differẽtias: at non per ſimilitudinem proportionum, quemadmodum in hac euenit.

Huius medietatis propriũ eſt illud, In maioribus terminis & in minoribus proportio ſemper æqualis eſt. Veluti inter 30 & 10, eadem eſt proportio quæ inter 6 & 2.

Alia eius proprietas eſt, In proportionalitate continua differentiæ terminorum eadẽ inter ſe ſunt proportione, qua ſunt termini,

quorum ſunt differentiæ. Exemplum. ſicut 8 ad 4 dupla ſunt, ſic 4 ad 2. Similiter differentia inter 8 & 4, quæ eſt 4, dupla eſt ad differentiam inter 4 & 2, quæ eſt 2.

Rurſus alia proprietas geometricæ medietatis in proportionalitate continua multipliciũ hæc eſt, In numeris duplis minor terminus per ſeipſum exceditur à maiori: veluti 1.2.4.8. In numeris triplis minor terminus ſuperatur per ſeipſum duplicatum: ſicut 1 3.9.27. in quadruplis per ſeipſum triplicatum: ſicuti 1.4.16.64. & ita deinceps minor terminus exceditur à maiore.

Alia præterea proprietas eſt, Si hæc medietas conſtituatur in tribus terminis, quicquid ex ductu alterius extremi in alterum producetur, æquale erit ei quod ex medij in ſeipſum ductu natũ erit. Veluti ſi ſumas 8.4.2. bis 8, ſunt 16: quater 4, tantundem. Similiter in quatuor terminis, quicquid ex alterius extremi in alterum multiplicatione natum erit, æquale erit ei quod ex alterius medij in alterum ductu producetur. ſicuti ſi capias 16.8.4.2. bis 16, creãt 32: quater 8, tantundem. Ex hac proprietate dependet celebris illa quatuor proportionalium regula, quæ de tribus notis quartum ignotũ proferentibus ſuprà data eſt: per quam in negotiationibus, innumera in lucem veniunt.

HARMONICA medietas eſt, vbi poſitis tribus terminis, ſicut maximus eorũ ſe habet ad minimũ, ita differẽtia inter maximũ & mediũ ſe habet ad differentiam inter medium & minimũ. Hæc autem medietas cum communiter & differẽtias & proportiones admittat, tamen neque æqualibus differentijs, neque æqualibus proportionibus conſtituitur. Veluti ſi inter 6 & 2 media ponantur 3: ibi tripla proportio eſt maximi ad minimum, videlicet 6 ad 2. Eadémque eſt proportio differẽtiæ maximi ad mediũ, quæ eſt 3 ad differentiã medij ad minimũ, quæ eſt vnitas. nam 3 ad 1 triplam itidẽ proportionem faciũt; quæ cum extremorum proportione conſentit. Ex hac medietate eliciuntur omnes muſicæ concentus.

Illud huius medietatis eſt proprium, In maioribus terminis maior ſemper eſt proportio: atque in minoribus minor. quod contra eſt in medietate Arithmetica. Verbi gratia. cape 6.3.2. de quibus 6 ad 3 comparata duplam proportionem habent: tria verò ad 2, ſeſquialteram, quæ minor eſt quàm dupla.

Alia huius proprietas, Quota parte minimi termini, minimus ipſe exceditur à medio: totidem partibus maximi, medius ſuperatur ab ipſo maximo. Verbi gratia, ſume 6.3.2. Duo exceduntur à 3 per

dimidium ipſius binarij quod eſt vnitas. Similiter 6 excedũt 3 per dimidium ipſius ſenarij, quod eſt 3. Rurſus huius proprium eſt, Si extremi termini proportionũ ſimul iungantur, & totum illud additum multiplicetur per medium, id quod inde proueniet, in dupla proportione ſe habebit ad illud quod ex multiplicatione extremi per extremum producetur. Verbi gratia, ſume 6.3.2. adde 6 ad 2, fient 8: multiplicetur 8 per 3, quæ medium tenent, & ſurgent 24. Item ſi multiplices extremum per extremũ, videlicet 6 per 2, prodibunt 12. quæ faciunt dimidium de 24.

Illud annotandum eſt, has tres medietates inter duos terminos inueniri poſſe. vtpote inter 10 & 40, quippe ſi in medio ſtatuas 25, Arithmetica medietas prodibit: ſi ponas 20, medietas Geometrica erit: ſi 16, harmonica medietas naſcetur.

Quomodo propoſitis duobus terminis medium proportionale ſit inueſtigandum.

PROPOSITIS duobus terminis medium Arithmeticum ſic exquires. De maiori numero ſubtrahe minorem, & reliqui dimidium adde minori: ita quod inde exibit, mediũ proportionale erit. Exempli cauſa, inter 10 & 40 ſubductio deprehendit reliquum eſſe 30. horum dimidium 15 adde minori numero 10, & prodeunt 25. quod medium eſt quæſitum. Vel ſi libet facilius, Coniunge vtrunque extremum, & totius coniuncti dimidiũ proportionale Arithmeticum erit. Nam ſi ſumas 10 & 40, adde ea ſimul, fiunt 50: ea ſi dimidies, habebis 25. id medium eſt Arithmeticum.

QVÒD SI inter eoſdem terminos 10 & 40, medium proportionale Geometricum eruere voles: alterum in alterum multiplica, videlicet 10 in 40, & procreabis 400. cuius numeri producti radicẽ quadratam extrahete oportet, quæ medium proportionale Geometricum erit. radicem autem eam 20 inuenies.

AT SI medium proportionale harmonicum inuenire libet, primum iunge extrema ipſa, videlicet 10 & 40: ſic ſurgent 50. Deinde ſubtrahe minorem de maiore, & reliquum erit 30, differentia vtriuſque numeri. quam ſi in minus extremum, videlicet 10, ducas, naſcentur 300. Eum numerum productum diuide per ſummam vtriuſque extremi coniunctam, videlicet 50: & 6 exibũt. quæ adde minori termino 10: & prodeunt 16. Hoc eſt proportionale medium harmonicum inter 10 & 40.

Quæ medietates quibus rerum publicarum ſtatibus cõparetur.

ARITHMETICA medietas reipublicæ adſimilatur, quæ à paucis regitur, quòd in minoribus eius terminis maior ſit proportio. Harmonica verò medietas optimatũ reipublicæ comparatur, quòd in maioribus eius terminis proportio ſit maior. At medietas Geometrica, quòd in maioribus terminis & in minoribus proportionẽ æqualem ſeruet, popularem quodãmodo rempublicam refert, in qua ciues omnes, & ſummates, & plebeij, ius æquale vendicant.

PRAETER has tres medietates præcipuas à veteribus proditas, Iordanus octo alias, quas collaterales vocat, addidit: quas qui cognoſcere volet, ab ipſo petat licebit. Nos verò qui de proportionibus tantum ea quæ ad ſupputationem in vita neceſſariam perdiſcendam, ſpectant, deguſtare, non vniuerſas proportionum vel regulas, vel proprietates attingere decreuimus: cæteras medietates à poſteris ad varietatem proportionalitatum perſcrutandam, curioſius adiectas, tanquam ad inſtitutum noſtrũ non attinentes, omittendas cenſuimus.

Quomodo propoſitis duobus quibuſuis terminis, proportio inter eos inueniri poſſit.

PROPOSITIS duobus terminis quibuſcunque, neceſſe eſt alterum altero vel maiorem, vel æqualem, vel minorem eſſe. Itaque ſi æquales ſunt, æqualitatis eſt proportio: quæ neminem latere poteſt. Sin autẽ alter altero maior eſt, aut minor, quãuis inæqualitatis ſit proportio quæ cõplures ſpecies habet, facile tamen in quam ſpeciem habitudo ea cadat, cognoſces ad hũc modũ, Maior terminus per minorem continuo ſecãdus eſt. Eo fiet vt quod in numero partitionis exit, proportionẽ denominet, quæ inter vtrunque extremum habetur. Idque perpetuum eſt quando maior terminus in comparatione præcedẽs, maioris inæqualitatis proportionem facit. Veluti ſi inter 8 & 4 proportionem quæris: diuide 8 per 4, & in numero partitionis 2 exeunt, quæ denominãtia proportionem illam monſtrant eſſe duplam: quam in multiplicium ſpeciem cadere palàm eſt. Similiter ſi inter 3 & 2 proportionem quæris, 3 per 2 ſecta, in numero ſectionis $1\frac{1}{2}$ proferunt: qui numerus proportionem ſeſquialteram indicat, quæ in ſuperparticularium ſpeciem cadit. ita inuenies in reliquis. Cæterũ ſi minor terminus in comparatione præcedens, minoris inæqualitatis pro-

portionem facit:tunc præpoſitio hæc(ſub)denominationi proportionis ex numero ſectionis eruendæ præponenda eſt. Veluti ſi inter 4 & 8 proportio quæratur:quia poſt ſectionem maioris factam per minorem 2 in numero partitionis inueniuntur : ſubdupla erit proportio, quæ in ſubmultipliciũ ſpecie continetur. Si inter 2 & 3 proportionem quæris, quia minor numerus in cõparatione præcedit, & ſectio maioris per minorẽ facta in numero partitionis 1 $\frac{1}{2}$ inuenit:ſubſeſquialtera proportio erit. quam de ſubſuperparticulariũ ſpecie prodire manifeſtum eſt. At ſiquis ſcire cupit quemnam ſenſum afferat hæc præpoſitio(ſub)minoris inæqualitatis proportionibus præpoſita, illud obſeruare oportet, Quemadmodũ per ſingulas maioris inæqualitatis ſpecies maior terminus minorẽ pluſquam ſemel cõtinet, ita per ſingulas minoris inæqualitatis ſpecies, quantum minor à maiore ſuperatur: tantum deeſt ad integrũ maiorem componendũ. Quare cum ea minoris ad maiorem cõparatio pariat minutias, ad vitandã earũ denominationẽ, veteres præpoſitionẽ hanc(ſub) ad ſingulas maioris inæqualitatis ſpecies addiderunt: tantum deeſſe ſignificantes ad integrum componendũ, quantum maior terminus ſuperaret minorem. Verùm ſi exquirere libet quas minutias hæ proportiones pariunt:continuo id cognoſces, ſi minorem terminum qui in proportione præcedit, in minutias frangas, ſecans per maiorem, eo modo quo in minutiarum libro admonuimus. ita ante oculos apparebunt minutiæ, in quauis minoris inæqualitatis ſpecie occurrẽtes. Exempli gratia. ſi proportionem inter 4 & 8 quæris, 4 per 8 diuide, & fient $\frac{4}{8}$. quæ minutiæ ſignificãt quatuor partes de 8 adhuc deeſſe ad integrũ cõponẽdũ, proportionémque æqualitatis creãdã. Quatuor verò octauæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{2}$. Ita adhuc aliæ $\frac{4}{8}$, quæ ſunt $\frac{1}{2}$, deſunt, vt fiat vnum integrum. Quo fit manifeſtum $\frac{4}{8}$ facere dimidium illius proportionis quæ æquare deberet 8. Sicut è cõtrario, ſi 8 ad 4 cõparentur, dupla erit proportio, quòd 8 in ſe capiãt bis 4. Similiter ſi 3 ad 9 comparentur, 3 per 9 ſecta proferent $\frac{3}{9}$, quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Et $\frac{6}{9}$ quæ creant $\frac{2}{3}$, deſunt: vt æqualitatis proportio ad 9 producatur. ita $\frac{3}{9}$ tertiam partem faciunt illius proportionis, quæ 9 æquare deberet. Itẽ ſi proportionẽ de 16 ad 5 voles ſcire, ſectio maioris per minorem facta deprehendit in numero partitionis 3 $\frac{1}{5}$. qui numerus cũ minutijs triplam ſeſquiquintam indicat, quæ in multiplicis ſuperparticularis ſpeciem cadit. Contrà, ſi de 5 ad 16 proportionem quæris, 5 per 16 ſecta

creant $\frac{5}{16}$: quæ de 16 partibus ſolas quinque inueniri demonſtrāt. ita deſunt $\frac{11}{16}$, vt integrum producatur, & æqualitatis proportio fiat. Ad eundem modum inter quoſuis numeros proportionē nullo negotio inueſtigare licet. Hæc autem ex Euclidis verbis eruuntur: vbi in libro ſeptimo dicit, Denominatio proportionis minoris numeri ad maiorem dicitur pars, vel partes ipſius minoris quæ in maiore ſunt. Maioris autem ad minorem, totum, vel totum & pars, vel partes, prout maior ſuperfluit. Quibus verbis denominationem proportionis, quæ de minore numero ad maiorem habetur, dicit eſſe vel partem vnicam, veluti $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$. vel partes plures, ſicut $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$. quas inuenies eo modo quo dictum eſt. Cæterum denominationē proportionis maioris numeri ad minorem, admonet eſſe vel totum, ſicut in multiplici: vel totū & partē, ſicut in ſuperparticulari: vel totū & partes, ſicut in multiplici ſuperpartiēti.

Liquet itaque in minoris inæqualitatis ſpecie, vtrancunque viā ſequare, rē ad idem recidere: ſiue ad vitandas minutias hanc præpoſitionē (ſub) maioris inæqualitatis denominationibus præponas, ſiue minutias ipſas ſuis nominibus ſingulas exprimas.

Quomodo cognoſcatur vna proportio alia eſſe maior.

SIMILES dicuntur proportiones, quæ eandem denominationem recipiunt, quas etiam interdū vnius proportionis, nōnunquam eiuſdem Arithmetici vocant. Maior autē proportio eſt, quæ maiorē denominationē habet: Minor verò, quæ minorē. Denominatio autē omnis tam grandis eſſe dicitur, quàm numerus eſt qui eā deſignat. Vnde ſi de tripla & quadrupla quæratur vtra earū ſit maior: quia maior numerus eſt quaternarius denominās quadruplam, quàm ternarius triplam denotās: ideo quadrupla maior erit quàm tripla, & quintupla quàm quadrupla, ſextupla quàm quintupla, & ſic in infinitum. Cæterum ſeſquialtera maior eſt quàm ſeſquitertia, propterea quòd ſeſquialtera denominatur de $1\frac{1}{2}$, & ſeſquitertia de $1\frac{1}{3}$: & quanquam in vtraque numerus integer æqualis eſt, minutiæ tamē his adiūctæ, ſunt inæquales. Porrò minores in ſeſquitertia. nam in fragmētis (vti ſuperius libro ſecūdo admonuimus) quāto maior eſt denominator, tāto minus eſt fragmentum. Quocirca $\frac{1}{4}$ minor eſt quàm $\frac{1}{3}$: ſicut $\frac{1}{3}$ minor, quàm $\frac{1}{2}$. atque ideo ſeſquialtera maior eſt quàm ſeſquitertia: & ſeſquiquarta maior eſt ſeſquiquinta: ſeſquiſextáque maior ſeſquiſeptima: & ſic de cæteris in infinitum, vbi minutiæ in

denominatione occurrunt. Vnde apparet triplam ſeſquialterã, vtpote de 7 ad 2, maiorem eſſe quàm triplam ſeſquitertiam. Nihilominus tamen tripla ſeſquitertia maior eſt quàm dupla ſeſquitertia, vel dupla ſeſquialtera: quod euenit non ratione minutiarũ adiunctarum quæ maiores ſunt in ſeſquialtera, ſed ratione denominationis ex integris deſignatæ. tripla enim à 3 denominatur: dupla à 2. Sed quæcũque minutiæ per (ſeſqui) denotẽtur, nũquã vnũ integrũ æquare poſſũt. quare maior erit proportio triplæ ſeſquitertiæ, quàm duplæ ſeſquialteræ propter maiorẽ triplæ denominationẽ.

Quomodo proportionẽ ex pluribus cõpoſitam eſſe cognoſcas.

De continve proportionalibus prius, deinde de improportionalibus dicere deſtinamus, quomodo in his proportionẽ ex pluribus eſſe cõpoſitam cognoſcas. Atque in continue quidem proportionalibus, de tribus quãtitatibus admonet nos Euclides ad hunc modũ, Si fuerint tres quantitates continue proportionales: proportio primæ ad tertiã dicetur proportio primæ ad ſecundam duplicata. Quibus verbis docet, ſi fuerit proportio primi ad ſecundum, ſicut ſecundi ad tertium, tunc proportio primi ad tertium erit, ſicut primi ad ſecundũ duplicata, id eſt, ex duabus talibus cõpoſita. quæ cõpoſitio cognoſcetur per multiplicationem denominationis ipſius proportionis in ſe. Verbi gratia, Sint tres numeri continue proportionales, dupli. veluti 2.4.8. in his proportio inter primũ & ſecũdum dupla eſt, ſi à maiore incipiat comparatio: alioqui ſi à minore, ſubdupla eſt. Denominatio autem duplæ venit à 2. Igitur ſi 2 in ſe ducantur, naſcentur 4, quæ inter primum numerum & tertium quadruplã eſſe proportionem denotabũt. ita demũ ſi à maiore incipiat cõparatio: alioqui ſi à minore, ſubquadrupla erit. Ipſa autẽ quadrupla eſt dupla duplæ, quia conſtat ex duabus duplis. Rurſus de 4. quantitatibus Euclides admonet, inquiẽs, Si fuerint quatuor quantitates continue proportionales: proportio primæ ad quartã dicetur proportio primæ ad ſecũdam triplicata. Quorum verborum ſenſus hic eſt, Si fuerint 4 quantitates continue proportionales: proportio primæ ad quartam erit, ſicut primæ ad ſecundam triplicata: hoc eſt prius in ſe, poſtea in productũ multiplicata. Verbi gratia. ſint quatuor numeri tripli cõtinue proportionales, veluti 1.3.9.27, proportio inter primum & ſecundum tripla eſt, ſi à maiore incipiat comparatio, quæ denominatur à 3. tria autem in ſe ducta producunt 9: ipſa autẽ 9

rurſus in 3 ducta procreant 27, quæ vigintiſeptuplam proportionē inter primū & quartū denotant, ſi maior in cōparatione præcedit. ea autem eſt tripla triplæ, quia conſtat ex tribus triplis. Perinde itaque eſt ac ſi diceretur, Proportio eſt duarum quantitatum ſimplex interuallum, & habet naturam ſimplicis dimēſionis, vt lineæ. Proportionalitas autem in tribus, eſt duplex interuallum, habens vnum medium: & refert naturam duplicis dimēſionis, vt ſuperficiei. Proportionalitas autem in quatuor, eſt triplex interuallum, habens duo media: & refert naturam triplicis dimenſionis, vt ſolidi. Similiter ſi quinque termini continue proportionales fuerint, proportio extremorum complectetur proportionem primorum quater: ſi ſex fuerint, quinquies eam capiet: ſi ſeptem, ſexies: & ita deinceps, vt ſemper proportio extremorum toties contineat proportionem primorum, quot ſunt omnes termini dempto vno. Nam cū proportiones ſint interualla quædam, interuallum autem niſi inter duo extrema eſſe nequeat: neceſſe eſt terminos ipſos interualla concludentes, vno plures eſſe quàm ſint ipſa interualla. Igitur ſi quatuor termini fuerint, ſicut 1.2.4.8. proportio extremorū, videlicet 8 ad 1 erit octupla. & quia proportio primorum eſt dupla, & tria ſunt interualla, octupla illa cōſtabit ex tribus duplis. Si quinque termini fuerint, veluti 1.2.4.8.16. proportio extremorū, videlicet 16 ad 1 erit ſedecupla: quæ quia primorū proportio eſt dupla, & 4 ſunt interualla, conſtabit ex quatuor duplis. qua ratione proportio de 32 ad 1 compoſita erit ex quinque duplis. & ſic in infinitum. Quo fit manifeſtum, in proportionalitate continua proportionē extremorū produci ex omnibus proportionibus medijs. Vel ſi alia via ſcire voles, pluribus cōtinue proportionalibus propoſitis, quæ proportio ſit inter extrema, proportionē inter prima duo obſeruabis: ſicut in exemplo proxime dato, vbi dupla erat inter 2 & 1. In qua denominator eius in ſe ducatur, & ſurgent 4. quæ inter extremos trium terminorum, ſicuti 1.2.4, quadruplā proportionem deſignant. Deinde ſi denominator ille productus, videlicet 4, iterum ducatur in denominatorem primæ proportionis, videlicet 2: naſcetur proportio inter extremos quatuor terminorum, vtputa 1.2.4.8. quæ eſt octupla. bis enim 4 ſunt 8. Rurſus ſi octo in denominatorē primæ proportionis 2 ducantur, fient 16. quæ inter extremos quinque terminorū, veluti 1.2.4.8.16. ſedecuplam monſtrant proportionem. Denuo ſi 16 in primæ proportionis denominatorem, videlicet 2, ducantur: prodibunt 32. quæ pro-

portionem inter extremos ſex terminorum, vtpote 1.2.4.8.16.32. denominabunt.& ſic in infinitũ poſtremæ proportionis denominatorem productũ per denominatorẽ primæ multiplicando procedere licet. Ita in longa ſerie continue proportionalium, omnes multiplicationes pauciores per numerũ binarium euenient, quàm ſunt ipſi termini propoſiti, ſicut ex prædictis apparet.

Quomodo in terminis improportionalibus lõga ſerie cõtinuatis vnam proportionem ex pluribus compoſitam eſſe cognoſcas.

HIC PVTAMVS operæpretiũ pauca quædã obiter præfari, qui termini ſunt improportionales. Sunt autem illi improportionales, inter quos proportionum diſſimilitudo cadit.nam ſicut proportionum ſimilitudo proportionalitas,ſic diſſimilitudo improportionalitas vocatur.quæ etiam ipſa, & continua,& ſeparata eſſe poteſt. Improportionalitas autem continua eſt,aut quia maior eſt proportio primi ad ſecundum quàm ſecundi ad tertium,& ſic deinceps: aut quia minor velut inter 1.2.6.24, vbi tres ſunt proportiones diſſimiles,quarum prima dupla eſt,inter 2 & 1,ſecũda tripla inter 6 & 2, quæ maior eſt,quàm dupla:tertia quadrupla eſt inter 24 & 6,quæ maior eſt quàm tripla.Improportionalitas verò ſeparata ſiue incontinua eſt aut quia maior eſt proportio primi ad ſecundum,quàm tertij ad quartum,vtpote inter 10 & 2 ac 6 & 4:aut quia minor. Huius autem inter proportiones diſſimilitudinis,ſiue continua ſit,ſiue ſeparata,duæ ſpecies habentur. Altera eſt, quando maior eſt proportio primi ad ſecundũ, quàm ſecundi ad tertium in continuis: vel quàm tertij ad quartũ in ſeparatis. quæ, maior improportionalitas nuncupatur, vtputa inter 8 & 2,ac 6 & 3. Altera eſt,quando minor eſt proportio primi ad ſecundum,quàm ſecundi ad tertium in continuis, vel quàm tertij ad quartum in ſeparatis. ſicuti inter 6 & 3 ac 8 & 2,quæ,minor improportionalitas appellatur. Ad hunc modum plerique omnes improportionalitatem & diffiniunt,& diuidunt.

CAETERVM quomodocunque termini complures ſiue proportionales ſiue improportionales lõga ſerie ſint cõtinuati,& quãtacũque inter improportionales diſſimilitudo interueniat,proportionẽ ſemper inter primũ & vltimũ ex omnibus eſſe collectã,Euclides nos admonet, inquiens, Cum continuatæ fuerint plures proportiones, ſiue eædem, ſiue diuerſæ: proportio primi ad vltimum

dicetur ex omnibus compoſita. Quocirca ſi plures proportiones, ſiue ſimiles, ſiue diſſimiles inter primum terminum & vltimũ me diæ interueniunt, proportio inter ipſos extremos terminos medias illas proportiones omnes, quotquot fuerint, complectetur. Denominationem autem habebit à numero producto ex multiplicatione denominationum omnium proportionum mediarum, nempe primarum duarum alterius in alteram, deinde producti cuiuſque numeri continuo in quanque proximam, donec per omnes ſit diſcurſum. Nam proportio cõponi ex duabus proportionibus dicitur, quando denominatio illius producitur ex ductu denominationum illarum proportionũ alterius in alteram. Similiter ex pluribus proportionibus componi dicetur, quando denominatio illius producitur ex duarum primarũ denominationum alterius in alteram, deinde producti in quinque proximam ductu vſque ad finem. Nec refert ab vtra manu denominationes ipſas multiplicare incipias, ſiue à dextrã, ſiue à ſiniſtra, dummodo cœptũ ſequens ordinem, per omnes diſcurras. Idque tam in proportionalitate continua, quàm in omni improportionalitate perpetuum eſt.

DE PROPORTIONALITATE autem continua, quãquam ex prædictis licet id videre, vnum tamen exemplum dare non grauabimur. Eſto, proponantur hi quinque numeri dupli 1.2.4.8.16. à dextra incipientes inter duos primos 16 & 8 duplam proportionem inuenimus. iterum progredientes inter 8 & 4, aliam duplam deprehendimus. Duæ igitur illæ denominationes altera in alterã ductæ quadruplam oſtendent proportionem inter 16 & 4. Rurſus procedentes inter 4 & 2 aliam duplam cernimus: quam in denominationem prius ex alijs productam videlicet quadruplam ducẽtes, octuplã formabimus. ſic inter 16 & 2 octuplã cõperimus. Denuo progredientes inter 2 & 1, duplam etiamnum habemus. eã autem in octuplam priores complectentem ducentes, ſedecuplam tãdem producimus. quæ proportio inter 16 & 1 inuenitur medias omnes complectens. Itidem in omni alia proportionalitate cõtinua eueniet, quotcunque proportiones in ea connectantur.

NVNC exẽpla de improportionalitate demus, quãdo proportiones diſſimiles inter primum & poſtremum interueniunt. Et exempli cauſa ſumamus hos quatuor numeros 1.2.6.24. Inter quatuor hos numeros tres ſunt proportiones. quarum prima inter 2 & 1 eſt dupla: ſecunda, inter 6 & 2 eſt tripla: tertia, inter 24 & 6 eſt quadrupla. Igitur ſi ſcire voles quæ proportio ſit inter extrema, vide-

licet 24 & 1, inueſtiga primum proportionem inter duo prima, videlicet 2 & 1, & duplam habebis: iterum inueſtiga inter 6 & 2, & tripla tibi occurret: quæ denominationes altera in alteram ductæ procreant ſextuplam: ea erit proportio inter 6 & 1. Deinde ſi progrediens quæris proportionem inter 24 & 6, quadruplã inuenies: ea autem ſi in denominationem ex prioribus collectam videlicet ſextuplam ducatur, viginti quadrupla naſcetur: quam proportionem ex dupla tripla & quadrupla compoſitam videre licet. In hoc exẽplo minor improportionalitas continua eſt, ſi à ſiniſtra in dextram tendas, & à maioribus terminis ad minores comparationem in ſingulis proportionibus facias, vti nos iam fecimus.

SIMILIS cõpoſitio proportionis inter extrema erit, etiam ſi proportiones omnes ex integris & minutijs, vel minutijs ſolis ſint denominatæ. Quod vt magis appareat, exempli gratia ſumamus hos quatuor numeros 4.6.8.10. inter quos, tres proportiones diſſimiles habentur: videlicet inter 6 & 4 ſeſquialtera, inter 8 & 6 ſeſquitertia, inter 10 & 8 ſeſquiquarta. quarũ proportionum denominatores capiam⁹, videlicet pro ſeſquialtera $1\frac{1}{2}$: pro ſeſquitertia $1\frac{1}{3}$: pro ſeſquiquarta $1\frac{1}{4}$: ipſorúmque priores duos alterum in alterũ ducamus, eo modo quo in minutiarũ libro edocuimus: ita producetur denominator proportionis ex ambabus compoſitæ. Deinde productum ex illa multiplicatione denominatorem iterũ in tertiæ proportionis denominatorẽ ducentes, procreabimus denominatorem illius proportionis, quæ ex tribus illis cõponitur. Igitur ſi à prioribus duobus incipientes $1\frac{1}{2}$ in $1\frac{1}{3}$ ducamus, enaſcentur 2, quæ de ſeſquialtera & ſeſquitertia duplam proportionẽ componi demonſtrant. Deinde 2 in $1\frac{1}{4}$ ducamus, & producẽtur $2\frac{1}{2}$: qui numerus proportionẽ de tribus illis varijs cõpoſitam duplã ſeſquialteram denominabit: quæ proportio erit inter extremos omniũ illarũ proportionũ terminos, videlicet 10 & 4. In hoc exẽplo maior improportionalitas cõtinua eſt, ſi à ſiniſtra incipias, & maiores terminos ad minores cõparans in dextrã tendas, vti nos iã fecimus.

IAM verò exemplũ demus, quando improportionalitas ſeparata ſiue incontinua occurrit: nam Euclidis regula, quæ inſtar oraculi, neminẽ fallit, de ea etiam idem præcipit. Itaque cõferamus hos quatuor terminos 8 ad 2 pro priore proportione, & 6 ad 3 pro poſteriore: inter priores duos, eſt quadrupla, quæ maior eſt quàm ea quæ inter poſteriores dupla eſt: atque eapropter maior improportionalitas in his reperitur: & tamen proportio inter primum ter-

minum prioris proportionis & vltimum poſterioris ex omnibus proportionibus medijs cõpoſita comperietur, atque etiam ex illa quæ duas vtrinque poſitas media diſiungit:ea eſt inter 2,quæ ſunt in fine prioris proportionis, & 6 quæ ſunt in initio poſterioris. Id autem per regulam modo datam fiet manifeſtum. Nam ſiquis à ſiniſtra ab octo faciens initium in dextram tendat, inter 8 & 2, quæ prima occurrunt, quadruplam habebit. Deinde progrediens inter 2 & 6, quia minor terminus in comparatione præcedit, ſubtriplam comperiet,quæ minoris inæqualitatis eſt proportio:atque ideò ſicut ſuperius mõſtrauimus, per minutias ſuas denominãda, videlicet $\frac{2}{6}$,quæ ſunt $\frac{1}{3}$: ita ſi $\frac{1}{3}$ quæ hanc proportionẽ denominat,ducatur in 4 quæ denominãt priorem,naſcentur $\frac{4}{3}$: quæ vnũ integrum & vnam tertiam facientes,ſeſquitertiam proportionem inter 8 & 6 ex duabus prioribus cõponi demõſtrant. Rurſus progredienti inter 6 & 3 proportio dupla occurrit : quæ quia à 2 denominatur,2 in productum ex priore multiplicatione denominationem,videlicet 1 $\frac{1}{3}$ ducantur:& in nŭmero producto $\frac{8}{3}$ comperientur:quæ ſi ad integra reducas,inuenientur 2 $\frac{2}{3}$: quæ duplã ſuperbitertiam proportionem inter 8 & 3 manifeſtant:quã ex tribus illis medijs cõpoſitam eſſe,per regulam Euclidis explicauimus. Id quod paulo apertius de induſtria fecimus, vt nihil intereſſe mõſtraremus,qui termini medij inter extremos interueniant,etiam ſi maiore extremo ſint maiores,aut minores minore. Quanquã ſunt qui putant,ſi id fiat,maiores in medio proportiones nõnunquam occurſuras,quàm quæ eſt inter primum & vltimum, & fieri poſſe negant,vt pars ſuo toto ſit maior. Veruntamen id nihil obſtabit quo minus proportio inter primũ & vltimũ ex omnibus medijs colligatur. Nam nũquam accidet vt maior in medio proportio,quàm quæ inter primũ & vltimum eſt,intercedat, quin ſimul alia minoris inæqualitatis proportio media etiam reperiatur, quæ cum maiore copulata tantum auferet,quantũ illa nimium redundat, vt procreatio proportionis inter primum & vltimum ex medijs omnibus ad æqualitatẽ perducatur. Et ſi pergis quærere quomodo fieri poſſit vt proportioni adiuncta proportio quicquam ab ea detrahat, facile eſt explicatu, ſiquis proportionum naturã pernouit. Omnis nanque proportio maioris inæqualitatis alteri maioris inæqualitatis addita,proportionem creat alterutra maiorem. At omnis proportio minoris inæqualitatis alteri minoris inæqualitatis adiuncta,minorẽ,quàm alterutra ſit,profert. Cæterũ quan-

do altera maioris inæqualitatis proportio, & altera inæqualitatis minoris copulantur, proportio quæ procreatur, minor eſt quàm quæ maioris eſt inæqualitatis, & maior quàm quæ minoris. Quo fit vt nō omnis proportionū collectio ſemper augeat. Itaque quādo proportionē, quæ eſt inter primum & vltimum, ex medijs cōſtare Mathematici tradunt, hoc exprimūt ex omnibus medijs proportionibus eam colligi: quāuis non tota vnaquæque media ſemper ſit pars illius, quod interdū illa proportionum copulatio detrahat: quod cū acciderit, quicquid de ſingulis non detractū reſtabit, partis vicem præſtabit in ea proportione quæ eſt inter primū & vltimum. Rem illuſtremus exemplo: in quo & maiore extremo termino maiorē, & minore minorem interponamus: capiamúſque hos quatuor terminos 2.1.20.16. inter quos, ſi 2 ad 1, & 20 ad 16 cōparemus, maior improportionalitas ſeparata habebitur. Nihil refert ab vtra manu multiplicatio initium ſumat, dūmodo cœptum ordinē progrediēdo ſeruet. Igitur à ſiniſtra, ſi libet, ordiamur: vbi inter 2 & 1 dupla proportio inuenitur: at inter 1 & 20 ſubuigintupla, quæ proportio progredienti proxima occurrit, & his minutijs exprimitur $\frac{1}{20}$. Ideo numeros has duas proportiones denominantes, alterum in alterū ducamus, videlicet 2 in $\frac{1}{20}$: & producentur $\frac{2}{20}$. quæ faciunt $\frac{1}{10}$, & ſubdecuplam proportionem inter 2 & 20 ex prioribus illis duabus cōpoſitā indicāt. Rurſus inter 20 & 16 ſeſquiquarta occurrit: quocirca numerū eum denominantem videlicet $1\frac{1}{4}$ ducamus in denominationē illam ex prioribus productā, videlicet $\frac{1}{10}$: & producentur $\frac{5}{40}$, quæ faciunt $\frac{1}{8}$: & ſuboctuplā proportionem, inrer 2 & 16 ex omnibus medijs proportionibus compoſitam eſſe manifeſtāt. Vides igitur nihil referre qui termini inter primū & vltimum medij interueniant, dummodo multiplicatio ab altero extremo ad alterū progrediens, cœptúmque ſeruans ordinē, nihil erret, neque minoris inæqualitatis proportio pro maioris ſumatur: id quod multos ſæpe fallit. Regula nāque ab Euclide data generalis eſt, ſiue proportiones eædē, ſiue diuerſæ fuerint: id eſt ſiue ꝓportionales, ſiue improportionales termini occurrāt.

QVAMOBREM quod de improportionalitate ſeparata dicim⁹, proportionem inter primum & vltimū ex medijs omnibus cōſtare, multo magis in ſeparata proportionalitate verū erit, in qua proportiones inter primū & vltimum partim ſimiles, partim ſunt diſſimiles. Veluti ſi cōpares 4 ad 2 & 6 ad 3, in his terminis tres proportiones habentur: quarum duas ſimiles tertia media diſſimilis

diſiungit. Hic 4 ad 2 collata duplam creant: ea prima eſt propor-tio: iterum 2 ad 6 collata, ſubtriplam proportionem mediam, quæ duas ſimiles vtrinque diſiungit, monſtrant. Quocirca 2 in $\frac{1}{3}$, ducta proferent $\frac{2}{3}$: quæ ſubſeſquialteram proportionem inter 4 & 6 oſtendũt. Rurſus inter 6 & 3 dupla inuenitur, primæ ſimilis, quæ in productam ſubſeſquialteram ducenda eſt, nempe 2 in $\frac{2}{3}$: & producentur $\frac{4}{3}$: quæ ſeſquitertiam proportionem inter primum extremum terminum primæ proportionis & vltimum ſecũdæ patefaciunt: quam ex duabus ſimilibus proportionibus extremis, tertiáque media diſſimili compoſitam eſſe liquet. Ad eundem modũ fiat, quotcunque & quæcũque proportiones, ſiue ſimiles & eædẽ, ſiue diſſimiles & quantuncunque variæ inter primum terminum & poſtremum mediæ interueniant.

QVAERET fortaſſe quiſpiam, quorſum de proportionum cõpoſitione prius monſtratum eſt in cõtinue proportionalibus: deinde in improportionalibus tam continue quàm ſeparatim: & demum in ſeparatis proportionalibus, quãdo vna præceptio pro omnibus ſufficere potuiſſet. In prõptu ratio eſt, Euclidem ſecuti ſumus, qui de proportionum cõpoſitione in quantitatibus cõtinue proportionalibꝰ prius docere, atque ita per faciliora diſcentiũ animos ad magis ardua præparare voluit, quàm regulã hanc enarratã tam multos receſſus támque varios anfractus habentẽ explicaret.

Quando proportio quæuis occurrit, quomodo proportiones alias ipſam componentes inueſtigabis.

QVI propoſita proportione qualibet, putat ſe poſſe dicere quot & quales aliæ proportiones eam componunt, in chaos maximum incidit imprudens. Sexcentæ nanque, imò verò infinitæ proportiones exquiri poſſunt, ex quibus quæuis conflari poteſt: id quod mox apparebit. Quamobrem quot proportiones quanque formare queant, enarrare nemo poteſt, quippe cum ſint innumeræ. Cæterum cõplures inueniri poſſunt, ex quibus quæuis proportio cõſtet. Nam propoſita proportione qualibet, ea neceſſe eſt duos terminos habeat, inter quos, ſi niſi vnum medium appones, hi tres termini duas proportiones capient, ex quibus ea quæ inter extremos eſt, omnino componetur. Porrò cum multis modis terminus medius variari poſſit, multæ & variæ proportiones per id enaſci poterũt. Id quod hoc exẽplo fiet manifeſtum. Inter 16 & 1, ſedecupla proportio eſt: inter quæ ſi medium terminũ 6 interponamus,

per hoc inter 16 & 6 proportio dupla ſuperbitertia habetur: at inter 6 & 1, ſextupla eſt proportio. Vnde liquet proportionem ſedecuplam, quæ eſt inter extrema, ex his duabus medijs conſtare. Id ita habere probabis, ſi duas illas medias denominationes alteram in alteram ducas. nam 6 quæ ſextuplã denominant, ducta in $2\frac{2}{3}$, quæ denominant alterã, 16 producunt: quæ ſedecuplã proportionem inter extrema demonſtrant. Quo fit manifeſtum, duplam ſuperbitertiã & ſextuplam cõponere ſedecuplam. Quòd ſi inter eadem extrema alium terminũ medium ponas, aliæ proportiones orietur: vtpote ſi 8 interſeras. Eo fiet vt inter 16 & 8 dupla oriatur: at inter 8 & 1, octupla habebitur: quæ denominationes, altera in alteram ductæ, ſedecuplam iterum creabunt. qua ratione ſedecupla ex dupla & octupla cõflata erit. At ſi inter ipſa extrema plures termini ſint interpoſiti, plures ita proportiones enaſcẽtur: quas vniuerſas ea, quæ inter primum & vltimum eſt, complectetur. Veluti ſi 5.6.8. ſtatuamus inter 1 & 16, vt hic ſit ordo 1. 5. 6.8. 16. inter quinque hos terminos, quatuor diuerſæ proportiones habentur: inter 5 & 1 quintupla, inter 6 & 5 ſeſquiquinta. Igitur 5 quæ quintuplam denominant, ducta in $1\frac{1}{5}$, quæ denominant ſeſquiquintã, procreant $\frac{30}{5}$: quæ 6 integra faciunt, & ſextuplã proportionem inter 6 & 1 ex ambabus compoſitam indicant. Deinde progrediens inter 8 & 6, ſeſquitertiam competies. Ita $1\frac{1}{3}$ multiplices in 6, quæ ex prioribus productam proportionem denominant, produces $\frac{24}{3}$: quæ ad integra reductæ faciunt 8, & octuplã inter 8 & 1 deſignãt. Rurſus progredere, & inter 16 & 8 dupla tibi occurret: igitur 2 ſi in 8 quæ ex priorum denominationum multiplicatione proxima producta ſunt, ducas, tandem produces 16, quæ ſedecuplam proportionem inter 16 & 1 denominant. Quo fit manifeſtum, ſedecuplam proportionẽ ex quintupla, ſeſquiquinta, ſeſquitertia, & dupla compoſitam eſſe. Igitur cum terminos inter extrema interponendos innumeris modis per minutias, in quas ſinguli frangi poſſunt, variare licet, manifeſto liquet, proportione propoſita nequaquam explicari poſſe quot & quæ proportiones eam poſſint componere, cum infinita varietas vnam atque eandem proportionem producat: id quod per exempla iam data videre licet: nam vt multæ proportiones, ex quibus quæuis conſtat, facile inuenientur, ita omnes exquirere quæ eam formare poſſint, infiniti operis erit.

Quomodo cuiuſque proportionis vel ambo extrema, vel alterum per numerũ ipſam denominantem inueniri poſſint.

OMNIS proportio duo extrema habet: quorum ſi id quod maius eſt, atque vnà ipſam proportionis denominationẽ cognoſcim⁹, diuiſio ipſius noti extremi per numerũ eam proportionẽ denominãtem facta, ignoratũ extremũ minus in numero partitionis patefaciet. Exempli gratia. Eſto, proportio dupla proponatur, cuius maius extremũ nobis notũ ſit 10: ſi minus eius extremũ eruere volumus, 10 per 2, quæ duplã denominant, ſecantes, in numero partitionis 5 inueniemus: ſic extremũ minus in lucẽ prodibit. At ſi proportionis denominatione cognita, minus extremum nobis erit notum, & maius ignoratum exquirere velimus, ipſum minus extremum in proportionis denominationem ducamus, & numerus productus maius extremũ erit. Veluti ſi de proportione tripla minus extremũ ſciamus eſſe 6: tria, quæ triplã denominant, in 6 ducamus, & naſcetur extremũ maius, videlicet 18. Cæterum ſi denominatione proportionis cognita, neutrum eius extremum habeamus notum, numeros quoſcunque, qui eam proportionem forment, pro arbitrio apponere poterimus.

HACTENVS de proportionum origine, generibúſque earum, & compoſitione. Nunc reſtat vt de earum Additione, Subductione, Multiplicatione, & Diuiſione dicamus. Id quod huius libri initio ſtudioſis polliciti ſumus.

DE PROPORTIONVM ADDITIONE.

ADDITIO proportionũ, ſiue cõtinuæ ſunt, ſiue ſeparatæ, ſiue ſimiles, ſiue diuerſæ, fieri debet ad eũ modũ quẽ paulo ſuperius explicauim⁹, vt in longa proportionũ ſerie, primarũ duarum denominatio ducatur altera in alterã. Deinde proportionis per hoc productæ denominatio in proximã denominationẽ ducatur: atque ita deinceps productæ cuiuſq; denominationis multiplicatio in quãque proximã, vſque in finẽ peragatur: quò cum ventum erit, poſtremo producta denominatio, velut ſumma quædã, proportionẽ monſtrabit omnes cõplectentẽ. Et quanquã exempla de proportionũ compoſitione iam antè data poſſunt ſufficere, vnũ tamen apponemus, in quo proportiones partim continuas, partim ſeparatas, partim ſimiles, partim diuerſas, connectemus. Eſto, ſeptẽ hi numeri proponãtur, 30.24.12.6.4.2.1. inter hos ſeptem numeros interualla ſex ſunt, & totidẽ proportiones. Qua-

re à ſiniſtra incipientes, ſingulóſque numeros maiores ad minores comparantes, inueniemus primã proportionem ſeſquiquartã, ſecundam & tertiã duplas, quartam ſeſquialteram, iterũ quintam & ſextam duplas. Omnes has denominationes ſic addemus. Primam denominationẽ ſeſquiquartã inter 30 & 24 in ſecundã duplam inter 24 & 12 ducentes, procreabimus duplã ſeſquialterã, quæ eſt inter 30 & 12. Deinde productã illam duplam ſeſquialterã in proximam duplam inter 12 & 6 ducentes, formabimus quintuplã inter 30 & 6. Rurſus quintupla illa producta in proximã ſeſquialteram inter 6 & 4 multiplicata, producet ſeptuplam ſeſquialterã inter 30 & 4. Denuo ſeptupla ſeſquialtera illa producta, ſi in duplã proximam inter 4 & 2 ducatur, enaſcetur quindecupla inter 30 & 2. Demũ quindecuplam illam in poſtremam duplã multiplicãtes, producemus trigintuplam inter 30 & 1: quæ proportio inter primum & vltimũ ſic formata, velut ſumma quædam, proportiones medias omnes intra ſe cõplectetur. Hoc modo proportiones, quæ ſunt numerorũ inter ſe habitudines, per additionem in vnã ſummam aptiſſime colliguntur. Nonnullis autem alia via proportiones ſic addere placet, vt earum omnium, quas ſunt addituri, terminos priores à ſiniſtra notent alium ſub alio, atque à dextra poſteriores earũ terminos prioribus è regione opponãt. Poſtea priorem terminum primæ proportionis in priorem ſecundæ multiplicant: numerũmque productum ſtatuunt priorem terminum proportionis ex ambabus cõpoſitæ. Deinde poſteriorem terminũ primæ proportionis in poſteriorem ſecundæ ducunt: & productũ ſimiliter faciunt poſteriorem terminũ compoſitæ. Porrò ſi proportiones plures addendæ fuerint, tertiæ proportionis priorem terminum in priorem terminum ex primis duabus compoſitæ ducunt, & productum ſtatuunt terminum priorem ex tribus illis compoſitæ: poſterioremque terminum tertiæ, in poſteriorem ex duabus primis compoſitæ ducentes, productum terminum apponunt poſteriorem ex tribus illis compoſitæ. Et ſic vlterius, priorem terminum cuiuſque proportionis cõpoſitæ in terminũ priorem proximæ cuiuſque proportionis addẽdæ, & poſteriorem cuiuſque cõpoſitæ in poſteriorẽ cuiuſque addendæ, ducunt vſque in finem. Quo fit vt inter terminos poſtremo productos, proportio enaſcatur omnes priores cõplectens. Exemplum afferamus. Sint hæ tres proportiones addendæ, prima ſeſquitertia inter 4 & 3, ſecũda ſeſquialtera inter 3 & 2, tertia dupla inter 2 & 1. Si primæ proportionis

priorem terminum 4 duces in 3 priorẽ ſecundæ,creabis 12:qui terminus erit prior proportionis compoſitæ.Et ſi 3 poſteriorem terminum primæ duces in 2 poſteriorem ſeundæ,produces 6:qui terminus poſterior compoſitæ proportionis erit.Ita producti illi termini 12 & 6 duplam proportionem habentes indicãt ex ſeſquitertia & ſeſquialtera ſimul additis,fieri duplam.Id quod etiam denominationes ipſæ altera in alterã ductæ probant.Iam verò ſi priorem terminum proportionis cõpoſitæ, videlicet 12,in tertiæ proportionis priorem terminum 2 multiplices,prodibunt 24:qui terminus erit prior proportionis ex tribus cõpoſitæ.Et ſi 6 poſteriorem terminũ compoſitæ in poſteriorem tertiæ 1 duces,nihil niſi ea ipſa 6 habebis: qui terminus erit poſterior proportionis ex tribus collectæ.Ita proportio inter productos terminos 24 & 6,mõſtrat ex ſeſquitertia,ſeſquialtera, & dupla ſimul additis, naſci quadruplam.Nam(vt inquit Euclides) omnium duorũ numerorum compoſitorum proportio vnius ad alterum,eſt ex laterum ſuorũ producta proportionibus.Latera autem numerorũ appellantur,quorum multiplicatione numeri producuntur. Id quoque verũ eſſe, proportionum denominationes, alia in aliam,ſicuti præcepimus, ductæ manifeſto probant. Hic proportionum addẽdi modus per earum terminos multiplicatos, vti diximus, productorum terminorum mutuas habitudines obiter commonſtrat. Cæterum modus ille ſuperior denominationes proportionum,alias in alias ducendi,multo apertius indicat collectam earum ſummam.

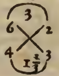
DE PROPORTIONVM SVBDVCTIONE.

SVBDVCTIO proportionũ monſtrat,quãdo aliæ proportiones ab aliјs ſubtrahũtur,quæ proportiones reſtabũt.Ea autẽ tum demũ fieri poteſt,ſi minores ſunt quæ ſubducũtur,quàm à quibus fit ſubductio,vel ſi ſunt eis æquales. Neque enim per rerũ naturã,quod maius eſt,ex minore demi poteſt. Quãobrẽ plurimũ iuuabit meminiſſe,proportiones eas aliјs maiores eſſe,quæ maiores aliјs denominationes habẽt: minores autẽ,quæ minores:id quod ſuperius admonuimus. Porrò modus ſubducendi proportiones longe facillimus hic eſt.Denominatio proportionũ earũ quæ ſubducẽdæ ſunt,& earũ à quibus fiet ſubductio,per numeros ipſas deſignãtes,ſeorſum annotẽtur. Deinde numerus denominans proportionẽ à qua fit ſubductio, diuidatur per numerum qui denominat proportionem ſubducendam:& numerus ſe-

ctionis proportionem ex ea ſubductione relictā deſignabit. Et vt exempla rem magis aperiāt: Eſto, proportio ſeſquialtera ſubduci à dupla debeat, 2 quæ duplā denominant diuiſa per $1\frac{1}{2}$ qui ſeſquialteræ dant nomē, in numero ſectionis proferunt $\frac{4}{3}$ quæ ad integra reductæ faciūt $1\frac{1}{3}$: atque ita mōſtrant ſeſquitertiā ex ea ſubductione relictam. Certū ſpecimen eſt rectè ſubductū eſſe, ſi proportio relicta ad ſubductam addita proportionē inſtaurat à qua ſubducta fuit: ſicut fit in numeris. Seſquitertia nāque ad ſeſquialteram addita per alterius in alteram ductū, duplam iterū in numero ſectionis format. Aliud exemplum demus: ſeſquiquartámque ſubducamus à dupla ſeſquialtera: $2\frac{1}{2}$ quæ denominant duplā ſeſquialteram, ſecta per $1\frac{1}{4}$, quæ deſignant ſeſquiquartā, in numero ſectionis mōſtrant $\frac{20}{10}$. quæ ſunt duo integra, & duplam proportionem ex ea ſubductione ſupereſſe monſtrāt. Rurſus ſi libet eape ſpecimen, relictámque duplā ad ſeſquiquartā adde, ducens alterā in alterā, & in numero ſectionis dupla ſeſquialtera iterū redibit.

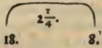
ALIVS etiam modus proportiones per earum terminos ſubducendi, traditur à quibuſdā. Porrò proportionē vtranque, & quæ ſubduci, & à qua ſubductio fieri debet, minimis notant numeris qui eas proportiones habeant, quo facilius reddatur opus: proportionem autē à qua fit ſubtractio, ſuprà ſcribunt: quæ verò ſubducenda eſt, infrà, vt termini terminis reſpondeant, priori prior, poſteriórque poſteriori. Deinde priorem terminū proportionis eius à qua fit ſubductio, in poſteriorē auferendæ, poſteriorémque eius terminū in auferēdæ priorem, oblique in formā crucis ducunt, & terminos ex his duabus multiplicationibus productos ſtatuūt eſſe relictæ proportionis terminos. Exēpli gratia. à proportione tripla inter 6 & 2 ſubducatur ſeſquitertia inter 4 & 3. In hac ſubductione 6 in 3 ducta creant 18. & 2 ducta in 4 proferūt 8: inter quos terminos productos, videlicet 18 & 8 proportio dupla ſeſquiquarta reperit, quæ ex ſeſquitertiæ ſubductione de tripla relinquitur.

tripla



ſeſquitertia

dupla ſeſquiquarta



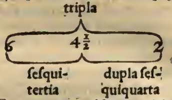
SVBDVCTIONEM hanc rectè factā eſſe probabis, ſi propor-

tionis relictæ denominationẽ addes ad ſubductæ,ſicuti modo diximus. Vel ſi mauis, proportionem relictam ad proportionẽ ſubductã adde,per alterius terminos in alterius ducendos,ſicuti proximo capite docuimus : quãdoquidem illa etiam via redibit proportio à qua ſubductio facta eſt. nã ſi 18 priorem terminum relictæ,ducas in 4 priorẽ ſubductæ,fient 72: & ſi 8 poſteriorem terminum relictæ duces in 3 poſteriorẽ ſubductæ,ſurgent 24:quæ proportionem illã fuiſſe triplam,à qua ſubductio facta eſt,deſignant.

QVOD ſi plures proportiones ab vna ſubduci debent, prius in vnam proportionem,velut in ſummam quãdam,omnes ſunt addendæ,& tum demum ad eius ſubductionem procedendum,modo non ſit facta maior quàm ea à qua ſubductio fiet. Porrò ſunt nonnulli qui ſingulas ſeorſum ſubducunt:Cæterum maiorem ea res laborem pariet,quàm ſiquis omnes ſubducendas prius in ſummam colligens vnicam ſubductionem faciat.

PROPORTIONVM itaque ſubtractionẽ duob9 his modis fieri vides:altero per denominationum ſectionem: altero per earum terminos oblique,vti diximus,multiplicãdos. Tertius quoque modus ex his duobus mixtus inuentus eſt,qui & proportionẽ relictã, & ſubductam, necnon illam etiam à qua fit ſubtractio,vna opera ante oculos ponit. Is autẽ eſt huiuſmodi, Proportio illa à qua fit ſubductio,ſuis numeris in primis notetur.Deinde inter maiorem illius terminũ & minorem tertius numerus medius apponatur,ad quem ea proportione maior terminus ſe habeat qua ſit ipſa proportio quæ ſubduci debet. Ita inter numerũ medium & terminũ minorem inuenietur ea proportio quæ ex ſubductione reſtabit. Exempli gratia, A proportione tripla inter 6 & 2 ſubducamus ſeſquitertiam.Poſtquã notata ſunt 6 & 2,numerus exquirẽdus eſt ad quẽ maior terminus,videlicet 6,proportione ſeſquitertia quæ ſubducenda eſt,ſe habeat.Eum autẽ numerum facile inuenies, ſi memoria tenes regulam quam ſuprà enarrauimus,quæ eſt huiuſmodi,Quando maior terminus proportionis cuiuſuis vnà cũ eius denominatione notus eſt, ſi ipſum terminũ per proportionis illius denominationem diuidas, minor terminus ignoratus ex numero ſectionis inuenietur. Igitur 6 illa quæ ſeſquitertiæ proportionis, quam inueſtigamus,maiorẽ terminum præſtant,per eius denominationem $1\frac{1}{3}$ diuidenda ſunt:& numerus partitionis proferet $\frac{18}{4}$, quæ faciunt $4\frac{1}{2}$.Is terminus minor erit proportionis ſeſquitertiæ inter 6 & $4\frac{1}{2}$. Deinde poſtquã per comparationẽ maioris extremi

ad medium numerũ interſertum,proportionem auferendã deprehendiſti, rurſus cõpara medium numerũ ad extremum minus: & proportionẽ eam quæ ex ſubductione relinquetur,inter eos reperies quæ eſt dupla ſeſquiquarta. Id ita eſſe probabis, ſi relictæ duplæ ſeſquiquartæ denominationẽ ad ſubductæ ſeſquitertiæ(ſicuti monſtrauimus)addes:rurſus nãque naſcetur proportio tripla. Per hanc ſubducẽdi viã tres proportiones ſimul ante oculos licet cernere:vnã,à qua ſubducim⁹:alterã,quã ſubducimus:tertiã,quã relinquimus.Itidẽ etiam apparẽt ſingularũ termini.Ad hæc proportionũ differẽtiæ,quæ ex ſubductione oriũtur,pateſiũt per hũc modũ,



PROPORTIONVM igitur additio multiplicationi numerorũ ſimilis eſſe videtur.At earũ ſubductio magnopere diuiſionis,præſertim eius quæ fit in minutijs, ſimilitudinem refert. Id quod ea quæ hoc capite,& proximo ſunt dicta,manifeſtum faciunt.

DE PROPORTIONVM MVLTIPLICATIONE.

MVLTIPLICATIO proportionum longe diuerſa eſt ab ea quæ fit in numeris . Numerus nanque eſt vnitatũ collectio.At proportio numerus nõ eſt, ſed ipſorũ numerorum inter ſe reſpectus & habitudo,quæ niſi inter duos minimùm numeros eſſe nequit.Igitur proportionẽ per proportionem, velut per quendã numerũ multiplicari,ſenſus cõmunis nõ admittit.Cæterum quãdo proportio proportioni eſt addẽda, numeri ipſas denominantes,aut ipſarũ termini,per aliarum denominationes, aut terminos multiplicari poſſunt,ſicuti ſuprà de earũ additione faciẽda dictũ eſt. quæ denominationũ aut terminorũ multiplicatio eſt additio ipſarũ habitudinum. Ita proportionũ diuerſarum collectionem in vnã ſummã,vulgus multiplicationẽ putat,quòd per eã fiat,cũ tamẽ ſit additio.Quare proportionũ aliarũ per alias multiplicatio,eo modo quo fit in numeris,nulla proprie eſſe poteſt.

VERVM ſi per proportionũ multiplicationẽ intelligis ſimilem & cõtinuam generationẽ plurium numerorum proportionalium ex vna ſtirpe naſcentium, & ſecundũ datam proportionem minimorum, ea fiet ad hunc modũ, Proportio quæuis, cui complures

ſimiles continuare cupis, minimis numeris qui eam proportionē habeant, velut ſtirps quædam ex qua cæteræ prodituræ ſunt, notetur. Deinde prior eius terminus in ſe multiplicetur, productúſque numerus ſignetur: iterū idem terminus ducatur in poſteriorē, productúſque ſecundus apponatur numerus. Tertio poſterior terminus ducatur in ſeipſum, numerúſque productus tertius tertio loco ſtatuatur: atque ita inter tres illos productos terminos duo interualla habētur, & duæ proportiones ſtirpis ex qua ductæ ſunt, ſimiles naſcuntur: eáque proportio quæ inter eorum extremos eſt, duas alias medias complectitur. Exempli gratia. proportionē ſeſquialterā ſignemus his numeris 3 & 2: ducamúſque 3 in ſe, & 9 ſurgent. Iterúmque 3 in 2 ducamus, & fient 6. Deinde 2 in ſe multiplicemus, & prodibunt 4: inter quos tres numeros productos 9. 6. 4. duæ proportiones ſeſquialteræ cōtinuantur: & inter primum 9 & vltimum 4 dupla ſeſquiquarta ex illis duabus ſeſquialteris cōpoſita inuenitur. Et quia 9 & 4 illorum trium terminorum continuè proportionalium extremi, cōtra ſe ſunt primi, ideò tres illi ſecundum datam proportionē ſunt tres minimi. Nam ſecundū Euclidem, Si numerorum quotlibet continuè proportionalium duo extremi fuerint contra ſe primi, eos omnes, ſecundum ſuam proportionem in totidem numeris ſumptā, minimos eſſe neceſſe eſt. Quòd ſi quatuor numeros eadē proportione procreare volumus, primum terminum ſtirpis in omnes tres numeros productos ſingulatim ducamus, numeróſque ex his denuo productos ſeorſum notemus. Deinde ſecundū terminum ſtirpis multiplicem⁹ in tertium productū ſolum: & numerus ex hoc productus quarto loco ſignetur. Igitur in exemplo priore quatuor numeros & tres ſeſquialteras procreaturi, primū numerum productū, videlicet 9 in 3 ducamus, & ſurgent 27. Iterum 6 ſecundum productum, in 3 ducentes, 18 formabimus. Rurſus 4 tertium productū, in 3 multiplicantes, producemus 12. Demúmque ſecundum terminum ſtirpis, videlicet 2, in ſolum tertium numerum antè productum, videlicet 4 ducentes, efficiemus 8: qui quartus erit numerus: inter quos quatuor numeros proportiones ſeſquialteræ tres habentur: & proportio inter primum 27, & vltimum 8, ex tribus illis coaceruata comperietur, tripla ſupertripartiens octauas. Et quoniam 27 & 8 qui quatuor illorum continuè proportionalium extremum locum tenent, ſunt contra ſe primi, ideò quatuor illi ſecundum datam proportionem ſunt quatuor minimi. Eodem modo priorem termi-

num ſtirpis ducẽtes in omnes quatuor illos numeros vltimo productos,notantéſque numeros rurſus producendos,& deinde poſteriorem ſtirpis terminum in ſolum quartum poſtremo productum multiplicantes, formabimus quinque numeros, & quatuor continuas proportiones ſeſquialteras. Síc que etiam vlterius quotlibet numeros eadem proportione cõtinue formare licet: vti ſubiectæ notæ monſtrant.

81. 54. 36. 24. 16.
27. 18. 12. 8.
9. 6. 4.
3. 2.

QVOD ſi cui proportionem per numerum aliquem multiplicare libet,tunc proportionis denominatio velut aliqua alia res numerata accipietur: & ideo quot vnitates in numero producto reperientur,totidem proportiones illius denominationis per numerum illum productũ deſignabuntur. Veluti ſi vnã triplam per numerum ternariũ multiplicare velimus,ſurgent 3 triplæ:ſi duas triplas in ternariũ ducamus,fient 6 triplæ. Similiter ſi vnã quadruplã per ternariũ multiplicemus,prodibũt 3 quadruplæ:ſi 2 quadruplas in ternarium ducamus,orientur 8 quadruplæ:& ſic de alijs fiat.

DE PROPORTIONVM DIVISIONE.

DIVISIO proportionis fit,quando inter eius extrema vel vnus termin⁹ medius, vel plures interponũtur: quo fit vt diuidẽda proportio in totidẽ alias proportiones ſecetur, quot interualla inter eius extrema ex illa interpoſitione oriuntur. qua de re ſuperius abũde diximus,quãdo docuim⁹ quomodo proportione quauis occurrente,proportiones aliàs ipſam cõponentes inueſtigares. Exempla illic explicata hic tantũ attingemus. Si proportionẽ diuidendam partiri in duas proportiones cupis, vnicus terminus interſerẽdus eſt. Veluti ſi in ſedecupla proportione inter 16 & 1 interponas 8, in duas proportiones eam ſecabis: quarũ vna inter 16 & 8 dupla erit, altera inter 8 & 1 octupla. At ſi in eadẽ ſedecupla inter eius extrema,tres terminos interpones, vtpote 8.6.5 vt quinque terminorũ hic ſit ordo,16.8.6.5.1. in quatuor proportiones ſectio per hoc fiet: quarũ prima erit dupla,ſecũda ſeſquitertia,tertia ſeſquiquinta,quarta quintupla. Similiter etiã fiet,ſi quotlibet terminos medios appones: nam in totidem proportiones facta erit ſectio, quot inter primum & vltimũ comperientur inter-

ualla. Nec quicquã refert qui termini medij inſerãtur, etiam ſi maiore extremo maiores ſint, aut minore minores, quemadmodũ illic latius explicauimus. Ad hunc modum diuiſio fit in proportionibus, nec vlla alia quàm hæc eſt, in eis reperitur.

Quomodo proportionẽ inter quoſuis numeros aſſignatam inuenias in minimis numeris qui eam proportionẽ habeãt.

INTER quoſlibet numeros aſſignatam proportionem inuenire potes in numeris ſecundũ eam proportionem minimis, ad hunc modum. Principio obſeruandum eſt an numeri ipſius datæ proportionis ſint cõtra ſe primi, vt nullus numerus eas numeret præter vnitatem: nam ſi ſunt huiuſmodi, illi ipſi ſunt ea proportione minimi. Sin autem alius numerus præter vnitatem eos numerat, maximus numerus vtrunque communiter numerans eſt inueſtigandus: & per illum inuentum vterque numerorum, tam antecedens quàm conſequens diuidendus. Quo fiet vt in numeris ambarum ſectionum minimi eiuſdem proportionis numeri appareant. Nam maximus numerus duos communiter numerans numerat eos, per minimos illius proportionis numeros. Quomodo autem maximus numerus duos cõmuniter numerans ſit inueſtigandus, ſuprà libro ſecũdo copioſius admonuimus, quando docuimus, Quomodo partes ad minimã ſui nomenclaturã redigantur. Quare quæ illic de numeratore & denominatore partium ſunt dicta, hic de numero antecedente & numero cõſequente cuiuſque proportionis repetita intelligantur: nam idem vtrobique modus eſt & partes ad minimam ſui nomenclaturam, & proportiones ad minimos numeros ipſas habentes, reducendi. Exemplum demus in numeris contra ſe primis. Inter 7 & 3 proportio dupla ſeſquitertia eſt: nec minores numeri haberi poſſunt, inter quos ſit ea proportio. Exemplum demus in alijs numeris cõmunicantibus, quos communis aliquis numerus alius quàm vnitas metitur, Veluti inter 35 & 15, inter quos proportio dupla ſeſquitertia ex ſectione maioris per minorem reperitur. Et quia vterque illorum numerorũ numeratur à 5, qui maximus numerus eſt eos cõmuniter numerans, vtrunque per 5 diuidamus: & ex ſectione 35 facta per 5, in numero partitionis 7 inueniuntur. Iterũ per 5 diuidamus 15, & in numero ſectionis 3 prodeunt: ſic ex duabus illis ſectionibus minimi numeri 7 & 3 cõperiuntur, inter quos proportio dupla ſeſquitertia haberi poteſt.

Quomodo proportionum diſiunctarum ſimilitudo inueniri poſſit in minimis numeris ſecũdum ipſas proportiones continuè proportionalibus.

P ROPORTIONVM quarũlibet quæ ſeparatæ ſunt, & diſiunctæ, ſimilitudo in minimis numeris cõtinuatim proportionalibus ſecundũ illas ipſas proportiones diſiũctas, inueniri poteſt hoc modo. Notẽtur quæuis proportiones diſiunctæ, ſuis quæque minimis terminis. Deinde minim⁹ numerus exquiratur, quẽ primæ proportionis extremũ conſequens, & extremum antecedens ſecũdæ numerant. nam is inuentus primã proportionẽ cum ſecũda copulabit. Extremũ autem antecedẽs ei adiungendũ, ita demum inueniemus, ſi primæ proportionis antecedens per eum numerũ multiplicamus, per quẽ primæ extremum cõſequens multiplicatũ, producit minimũ ab eo, & antecedẽte ſecundæ numeratũ. Conſequens verò ſecundæ proportionis continuandæ exquiremus, ſi per eum numerũ multiplicemus cõſequẽs ſecũdæ proportionis diſiũctæ, per quẽ antecedens eiuſdẽ procreat minimũ numerũ ab ipſo, & primæ diſiunctæ cõſequente numeratum. Deinde ſi antecedens tertiæ proportionis diſiunctæ, per aliquem numerũ numerat conſequẽs ſecundæ cõtinuatæ, per eundẽ multiplica cõſequens tertiæ diſiunctæ, & produces cõſequens proportionis tertiæ, cũ duabus ſuperioribus cõtinuandæ. Sin autẽ tertium antecedens diſiunctæ proportionis per nullum numerũ numerat cõſequens ſecũdæ continuatæ, ſnquirendus eſt minimus numerus, quẽ conſequens ſecundæ continuatæ, & antecedens tertiæ diſiunctæ numerant: is autem inuentus, antecedẽs erit tertiæ proportionis continuatæ. Poſtea ſi conſequens tertiæ diſiunctæ multiplicabis per eũ numerum, per quẽ antecedens eiuſdẽ multiplicatum, producit minimũ ab eis numeratũ, prodibit conſequẽs tertiæ continuatæ proportionis. Deinde ſi reliquos terminos antè cõtinuatos multiplicabis per eum numerũ, per quem cõſequens ſecũdæ cõtinuatæ producit minimũ à ſe & ab antecedente proportionis tertiæ diſiunctæ numeratũ, tres proportiones diſiũctim propoſitæ cõiungẽtur: ſdque in minimis terminis. Et quanquã duæ primæ proportiones, antè in minoribus terminis cõiunctæ erãt, has tamẽ tres vniuerſas in minoribus terminis copulare nõ licet. Atque ad eundẽ modũ quotlibet proportiones cõtinuari poſſũt. Exẽplũ afferamus de tribus ꝓportionib⁹, vt res magis appareat: redigamúſꝙ ad minimos numeros continuè ꝓportionales has tres pro-

portiones, videlicet primã, triplam ſupertriquartã: ſecundam, ſubquadruplam ſeſquialterã: tertiam, ſeſquialterã. Porrò minima tripla ſupertriquarta reperitur inter 15 & 4: minima ſubquadrupla ſeſquialtera inter 2 & 9: & minima ſeſquialtera inter 3 & 2, quos numeros minimos in ordinem deſignemus. Deinde primas duas proportiones per terminos cõtinuè proportionales copulaturi, minimum numerũ inquiramus, quẽ 4 conſequens primæ & 2, antecedens ſecũdæ numerãt: & quia hi ſũt numeri cõmunicãtes, ideò minimi illius proportionis, cuius ipſi ſunt, inquirãtur. Illi autẽ ſunt 2 & 1, qui inuẽti ſubnotẽtur, 2 ſub 4, & 1 ſub 2. Ita ſiue 1 in 4, ſiue 2 in 2 ducamus, cõperiemus 4 minimum numerũ numeratum ab eis. nam ſecundũ Euclidem, Quilibet duo numeri minimos numeros ſuæ proportionis maior minorem, aut minor maiorẽ, multiplicãtes, minimũ ab ipſis numeratum producũt: quare ſupra verticem inter primã proportionem & ſecundam illum annotemus. Poſtea antecedens ei adiungendum inueſtigemus. & quia 4 cõſequens primæ numerat 4, minimũ numerum numeratum à conſequente primæ, & antecedente ſecũdæ per vnitatẽ: per eam multiplicemus antecedens primæ 15, & ipſa 15 prodeunt, quæ ſupra verticem ſignata antecedens erunt ad illa 4 ſuprà annotata. Deinde vt cõſequens ſecundæ proportionis cõtinuandæ exquiramus: quia 2 antecedens ſecũdæ diſiunctæ per 2 multiplicata producunt 4, minimum videlicet numerũ numeratum à conſequente primæ diſiunctæ, & antecedente ſecũdæ diſiunctæ: per illa 2 multiplicemus 9 conſequens ſecũdæ diſiunctæ, & producemus 18: quæ ſupra verticem ſignata, cõſequens erunt proportionis ſecundæ continuatæ. Sic ex duabus proportionibus diſiunctis duas edidimus proportiones continuatas, quibus tertiã diſiunctã copulemus. Et quia ternarius antecedens tertiæ diſiunctæ numerat conſequens ſecundæ cõtinuatæ, videlicet 18 per 6, multiplicemus cõſequens tertiæ diſiunctæ, nempe 2, per illa ipſa 6, & prodibunt duodecim quæ erunt conſequens tertiæ cõtinuatæ. Ita quatuor hi numeri, 15. 4. 18. 12, cõtinuè proportionales erunt, ſecundum tres illas proportiones diſiunctas, videlicet triplam ſupertriquartã, ſubquadruplã ſeſquialteram, & ſeſquialterã. Minimi autem cõtinuè proportionales ſunt, in quibus has proportiones ſecundum illas diſiunctas inuenire licet: quia nulli totidem his minores hoc præſtare poſſunt.

15		4		18		12
15	4		2 9		3 2	

SIN autem tertium antecedens proportionis diſiūctæ, per nullum numerum numerat conſequens ſecundæ continuatæ: inquirendus eſt minimus numerus, quem conſequens ſecundæ continuatæ & tertium antecedens diſiunctæ numerāt. veluti ſi quadruplam inter 4 & 1 ſeſquialteram inter 3 & 2, ac triplam inter 3 & 1 continuare velimus: comperiemus eo modo quo iam diximus, primas duas proportiones quadruplā & ſeſquialterā his tribus minimis terminis 12.3 & 2, ſecundū datas proportiones cōtinuari. Quibus tertiā diſiunctā poſteà copulemus. & quia 3 antecedens tertiæ diſiunctæ, per nullum numerum numerat conſequens ſecundæ continuatæ 2, inquirendus eſt minimus numerus ab his numeratus. & quia 3 & 2 ſunt numeri contra ſe primi: alter in alterum ducatur, & producentur 6. quæ erunt antecedens tertiæ continuādæ: & ſupra verticē conſequētis ſecundæ continuatæ reponenda ſunt. Deinde quia 3 antecedens tertiæ diſiūctæ ducta in 2, produxerūt 6: ſimiliter per illa ipſa 2 multiplicemus conſequens tertiæ diſiunctæ, videlicet 1, & prodeunt 2. quæ erunt conſequens tertiæ continuatæ. Iam verò quia tertia proportio continuata inter 6 & 2, maiores habet terminos, quàm vt præcedentes antè continuati cum ea congruant, & conſequens ſecundæ continuatæ 2 multiplicata per 3, produxerunt minimum à ſe numeratum: multiplicemus per illa 3 antecedens ſecundæ continuatæ, videlicet 3: & prodeunt 9. quæ iam erunt antecedens ſecundæ continuatę, & ſupra verticem ante 6 ſtatuentur. Rurſus per illa 3 multiplicemus etiā antecedēs primæ continuatæ, videlicet 12: & producentur 36. quæ iam erunt antecedens primæ continuatæ: & ſupra verticē ante 9 reponi debent. Ita in his quatuor terminis, 36.9.6.2, continuatæ ſunt in minimis terminis tres proportiones, videlicet quadrupla, ſeſquialtera, & tripla, ſecundum illas tres diſiunctas datas. Ex hac autem poſtrema terminorum antè continuatorum multiplicatione per vnū & eundem numerū facta, propterea vt cum tertia continuata proportione conueniant, producuntur eædem proportiones quæ antè in minoribus terminis continuatæ erant. Nam ſecundum Euclidem, Si vnus numerus in plures ducatur, eadem erit numerorū inde productorum, quæ multiplicatorum proportio.

36		9		6	2
12		3		2	
4	1	3	2	3	1

HAC ratione his quartam proportionem diſiunctam, & quot-

libet alias per terminos continuè proportionales connectere licet. nam de primis quibuſque proportionibus primum expedire oportet:atque his adaptatis,ad alias tranſire.

De proportione habente medium duóque extrema.

APVD GEOMETRAS ſpecies quædam proportionis longe à prædictis diuerſa reperitur ,quam Euclides nuncupat proportionem habentē medium duóque extrema.Ea nūquam in paucioribus terminis quàm in tribus haberi poteſt , cum cæteræ proportiones inter duo conſtent. Qua in re ſimilitudinem proportionalitatis refert , & ad quorundam corporum dimenſionem,quæ ſine ea intelligi nequit,adinuenta. Geometris ad multa confert: ſicuti Euclides libro 13 multis præceptis explicat, qui etiā libro 6,propoſitione 29,ſecundum eam proportionem lineam ſecare docet. Verũtamen quia in numeris huiuſmodi proportio nō habetur, nec ad ſupputationē facit : nos Geometris eā relinquamus.

De progreſſione numerorum continuè proportionalium.

PROPORTIONVM cōtinuatarum progreſſio,quā Geometricam vocant,eſt plurium numerorum continuè proportionalium in vnam ſummam collectio:quæ compendium affert numerandi eos numeros inter quos cōtinua & æqualis eſt proportio: quanuis numerorum differentiæ ſint inæquales. Et quia proportionum ſpecies variæ ſunt,ideò variæ in his dantur progreſſionum regulæ.Quare à multiplicium ſpecie, in qua dupli primum occurrunt,faciamus exordium.

IN compluribus numeris duplis longa ſerie continuatis primus numerus à poſtremo ſubduci,& quod de ipſo poſtremo reliquum erit, ad ipſum integrum poſtremum addi debet. Sic ſumma quæ inde ſurget,omnes ſeriei continebit vnitates. nec quicquam refert à quo numero ſeries initium ſumat: neque an numeri proportionales ſint integri,an minutiæ . Exemplum demus in his numeris, 3.6.12.24.48. A poſtremo 48 ſubtrahe primum 3:& ſupererunt 45. ea adde ad 48: & fient 93. ea ſumma eſt illius progreſſionis. Idem erit ſi ab vnitate incipias,veluti 1.2.4.8.16.32.64. ab vltimo 64 deme primum 1. & reliqua, quæ ſunt 63,ad 64 adde, & creſcent 127. quæ ſumma eſt vniuerſorum.Regula hæc & certa eſt,& perpetua, ſicut illa de triplis.

QVANDO numeri tripli longa ſerie cōtinuantur : primum à

poſtremo ſubducito: & reliqui dimidium, quod de poſtremo ſupereſt, integro poſtremo adde. Ita numerus vniuerſorum prodibit, à quocunque numero ſeries incipiat: etiam ſi minutiæ interueniãt. Exemplo ſint hi numeri, 1.3.9.27.81. tolle primũ 1 à poſtremo 81, & reſtant 80. cuius numeri dimidiũ eſt 40: ea adde ad 81, & fiet 121, quæ ſumma eſt omnium. Similiter eueniet ſi à 2 incipias, 2.6.18 54. deme 2 à 54, & remanent 52: cuius numeri dimidium eſt 26. ea adde ad 54: & ſurgent 80, quæ ſumma eſt vniuerſorum.

SIN quadrupli numeri continuè proportionales occurrent, deme primum de poſtremo: & tertiam partem eius reliqui, quod de poſtremo ſupereſt, ad ipſum integrum poſtremũ adiunge: & ſumma vniuerſorum habebitur. Veluti in his numeris, 1.4.16.64. ſubtrahe primũ à 64: & 63 relicta ſunt, quorũ pars tertia eſt 21. ea adde ad vltimũ 64: & exeunt 85, ſumma omnium. Itidem erit in 2.8. 32.128. tolle 2 ab 128: & relinquuntur 126. quorum tertia eſt 42: quæ addita ad 128, procreant 170, ſummam vniuerſorum.

AT VBI numeri quintupli longa ſerie cõnectuntur: ſi primus à poſtremo dematur, & reliqui de poſtremo relicti pars quarta ad integrum poſtremum addatur: omnium naſcetur ſumma. Vtpote 1.5.25.125. ſubtrahe 1 ab 125, & reſtant 124. quorum quarta eſt 31. quæ addita ad 125, faciunt 156: quæ ſumma capit omnes. Sic in infinitum procedit ordo in multiplicibus: vt ſi progreſſio ſit in ſextuplis: poſt ſubductionẽ primi ab vltimo factã pars reliqui quinta iungatur vltimo. ſi in ſextuplis: poſt factam primi à poſtremo ſubtractionem, addatur vltimo pars ſexta. ſi in octuplis, poſt eiuſmodi ſubductionem pars ſeptima adiũgatur. ſi in nonuplis, pars octaua. ſi in decuplis, pars nona. & ſic in infinitũ poſt ſubductionem primi ab vltimo factam ea pars reliqui, quæ denominatur à numero vnitate minore quàm proportionis denominatio ſit, addatur ad ipſum vltimum: & omnium ſumma prodibit.

DE progreſſione autem numerorum ſuperparticularium vnius proportionis, dantur etiam regulæ: & in primis hæc de numeris ſeſquialteris. In numeris continuè ſeſquialteris ſi primus duplicatus ſubducatur ab vltimo triplicato: id, quod reliquum eſt, ſummam omniũ numerorũ monſtrabit. Exemplo ſint, 2.3.$4\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$. duplica 2, & fiunt 4. triplica $6\frac{3}{4}$: & ſurgent $20\frac{1}{4}$. à quibus ſubtrahe 4, & reſtant $16\frac{1}{4}$ ſumma vniuerſorum.

AT IN ſeſquitertijs primus numerus triplicatus ab vltimo quadruplicato demendus eſt, & reliquum indicabit omnium ſummã.

IN ſeſquiquartis primus quadruplicatus à poſtremo quintuplicato ſubducatur,& reliquum monſtrabit ſummam.

IN ſeſquiquintis primus quintuplicatus ab vltimo ſextuplicato dematur,& reliquum ſummam proferet.

IN ſeſquiſextis primus ſextuplicatus à poſtremo ſeptuplicato demptus omnium ſummam relinquet. Et ſic in infinitum, numerus ex multiplicatione primi in proportiōis denominationē productus ſubduci debet à numero producto ex multiplicatione poſtremi in numerum vno maiorem quàm ſit ipſa denominatio. ita reliquum monſtrabit vniuerſorum ſummam: nec refert à quo numero progreſſio ſumat initium.

SIMILITER ad alias proportionum ſpecies regulæ dari poſſunt, ſi cui obſeruare libet. Veruntamen niſi faciles ſint, multo ſatius erit per additionem, ipſorum numerorum ſummam colligere, quàm per flexuoſas ambages compendium ſectari. nam quorſum progreſſio, ſi compendium non affert?

DE FALSARVM POSITIONVM REGVLIS.

SVPEREST nunc vt viam aperiamus, per quam ex fortuitis coniecturis, atque ipſis quidem falſis, & ad quas errores inſequuntur, propoſitæ quæſtionis veritas explicetur. Arabes & Phœnices mercatura celebres, & à quibus Arithmetica profecta primum putatur, artē illam veritatis inueniendæ barbaro vocabulo Cathaym appellāt, Latini ſiue falſarum poſitionū, ſiue falſarum coniecturarū regulas vocant: per quas penè vniuerſa quæ ad negociationem attinēt, atque alia pleraque poſſunt expediri, modo aliqua rei propoſitæ pars ſit certa & cognita. Per eā nanque miro compēdio reliqua omnia ignorata, quātumcunque ænigma præ ſe ferant, continuo inueſtigata in notitiam proferuntur. Qua in re dici non poteſt, quàm diuinis ingenijs prædit fuerunt primi huius ſcientiæ inuentores: quorum ſolertia factum eſt, vt quæ pleriſque imperſcrutabilia videntur, nullo negotio in lucem veniant. Porrò numerorum quæſtiones multæ ſæpe occurrunt, in quibus rei propoſitæ pars aliqua nobis cognita eſt, ſed alia eius pars quā maxime ſcire cupimus, à ſenſu cōmuni longe ſummouetur. Quam vt cum parte nota congruere faciamus, pro arbitrio noſtro fingere poterimus eam eſſe quæ magis apta videtur: & cū obſeruauerimus, vel quàm propè coniectura noſtra rem attigit, vel quàm longe à ſcopo errauit, iterū conijcere licet: vt ſi prio-

re coniectu parum profecerimus, ſaltem ſecundo propius accedamus. Quæcunque autem per vnicam poſitionem inueniuntur, ea etiam per duas expediri poſſunt. Cæterũ è conuerſo non idem eueniet. neque enim quicquid duæ poſitiones explicãt, id vnica præſtabit. Et quod maxime in his admirandum videtur, nihil refert quàm longe cõiectura nos fallat: nam per illos ipſos errores, regulæ mox dandæ nos ad veritatem perducent. De quibus dicere aggrediemur, & quidem prius de ea quæ per vnicam poſitionem, id quod quæſitum eſt, eruit.

REGVLA DE VNICA FALSA POSITIONE.

IN NVMERORVM quæſtionibus in quibus pars eſt cognita, pars eſt ignorata, frequenter euenit vt vnica coniectura fortuita, tametſi aberret à vero, id quod inueſtigatur manifeſtet. Nam cum obſeruamus quid ipſa coniectura parit, proportionémque annotamus quæ eſt inter id quod conijcimus, & id quod ex eo conſequitur: ad exemplum illius, inter partem cognitam & partem ignoratam, proportionem alteram procreare licet, dummodo nos adiuuet quatuor proportionalium regula quæ de tribus notis quartum ignotũ proferentibus ſuprà data eſt. quippe cum tria ſint cognita: primum id, quod conijcimus: ſecundum id quod ex eo conſequitur, inter quæ cadit proportio: tertiũ, quod de quæſtione propoſita eſt cognitum: certè quartum, quod ignoratum eſt, & tertio reſpondere debet, nequaquam latere poteſt. Ita vnica poſitio primam proportionem ſibi fingit. Ad cuius exemplum regula illa quatuor proportionaliũ ſuccedens, aliámque ſimilem proportionem formans, id quod quæſitum eſt, continuo in lucem profert. Exempla rem magis aperient.

VIATOR tot aureos in itinere reperit, vt eorum pars ſecunda tertiáque & quarta ſimul additæ facerent 50. Hæſitatur, quænam ſumma reperta erat. Pone quanuis ſummam quæ partes eas habeat: & vide an illius ſummæ partes denominatæ ſimul additæ faciant 50. Si faciunt, ea ſumma eſt quam quæris. Si non faciunt, vlterius inueſtigabis hoc modo, Finge ſummam repertam, quæ partes eas habeat, eſſe 12, cuius dimidium eſt 6, tertia pars 4, quarta 3, quæ omnes ſimul additæ faciunt 13. at tu quæris 50. Igitur coniectura te longe fefellit. Veruntamen ille ipſe error in viam te reducet, ſi rem bene conſyderes. Nam ſicut partes ſummæ per coniecturam poſitæ, quæ ſimul additæ fiunt 13, ſe habent ad ipſam ſum-

mam totam, quæ eſt 12, ſic partes ſummæ repertæ ſimul additæ, quæ ſunt 50, ad ipſam ſummam repertam quæ ignoratur, ſe habere debent. Atque ideo ad regulam de tribus notis negotiũ ſic applicabis, Si 13, quæ partes ſimul additas notant, veniunt ex 12 malè à te poſitis: cuius ſummæ partes illæ erũt, quæ collectæ cõplẽt 50? Sequẽs regulã multiplica 50 per 12, & ſurgent 600. ea per 13 diuide: & prodibunt $46 \frac{2}{13}$. quæ ſumma aureorum reperta erat. cuius dimidiũ eſt $23 \frac{1}{13}$, pars tertia $15 \frac{1}{13}$, pars quarta $11 \frac{7}{13}$: quæ partes ſimul additæ faciunt 50. Similiter eueniet, quæcunque alia ſumma quàm 12 per coniecturam ponatur: modo partes eas habeat. Vides itaque per adiumẽtum regulæ de tribus notis vnica cõiectura fortuita rem expediri: nec duabus poſitionibus eſſe opus.

PER hanc regulam exempla quæ ſequuntur poſſunt explicari: quæ ſubijcienda duximus, vt ad ea iuuenes exerceantur.

INVESTIGETVR numerus in quo 5 ſint $\frac{2}{3}$. Pone numerũ quem voles, qui partes eas habeat, veluti 6: & vide quantum capiant $\frac{2}{3}$: & inuenies 4. at tu quæris 5. Scrutare igitur ſi 4 faciunt $\frac{2}{3}$ de 6: de quo 5 complebunt $\frac{2}{3}$? tenta, & inuenies $7 \frac{1}{2}$.

EXQVIRATVR numerus ex quo, poſtquam pars tertia, pars quarta, & pars quinta ſubductæ ſunt, adhuc ſupererũt 24. Pone numerum aliquem qui partes eas habeat, Veluti 60. Poſtea deme partes illas, & vide quid reſtabit: & inuenies 13. Ecce quantum erraſti. quæſiuiſti 24, at inueniſti niſi 13. Quamobrem ſic tecum ratiocinare, Si 13 poſt partes ſubductas ſuperſũt de 60, de quo numero poſt ſubductas partes, relicta erunt 24? Tenta per regulam de tribus notis, & inuenies $110 \frac{10}{13}$ numerum illum eſſe, cuius pars tertia eſt $36 \frac{12}{13}$, quarta $27 \frac{9}{13}$, quinta $22 \frac{2}{13}$. quæ omnes ſimul additæ faciũt $86 \frac{10}{13}$. Et ſi ſubducantur à $110 \frac{10}{13}$, reſtabunt 24.

SI QVIS numerum exquiri iubet, à quo parte ſecunda, tertia, & quarta ſubductis, reſtent 24, Continuo reſponde, id fieri nequaquam poſſe. Nam quicunque numerus ſumatur qui partes eas habeat, ſemper minor erit quàm partium ipſius ſumma coaceruata, quo fiet, vt ne illa quidem ſubduci poſſit, nedum quicquam reſtare. Quippe (vt obiter admoneamus) tres ſunt numerorum ſpecies. Vna eſt eorum qui partium ſuarum ſummam maiorem habent, quàm ſint illi ipſi. hi abundantes vocantur. cuiuſmodi numerus eſt 12. nã huius dimidium eſt 6, pars tertia 4, quarta 3, ſexta 2, duodecima 1. quæ partes ſimul additæ redundant in 16, & corporis ſui numerum vincunt. Item 24 numerus eſt abundans: nam eius di-

midiũ eſt 12, pars tertia 8, quarta 6, ſexta 4, octaua 3, duodecima 2, vi ceſima quarta 1. quarum ſumma redũdat in 36. Altera eorum ſpecies eſt qui diminuti vocantur, in quibus ſumma partiũ ſimul poſita minor eſt, quàm ſint ipſi. cuiuſmodi numerus eſt 8. nam eius dimidium eſt 4, pars quarta 2, octaua 1: quarum partium collecta ſumma 7, minor eſt quàm totum corpus. Item 14 numerus eſt diminutus: nã dimidium eius eſt 7, pars ſeptima 2, quartadecima 1. ſumma omnium 10, toto corpore minor eſt. Tertia ſpecies eorum eſt, in quibus partes in ſummam collectæ ſuo corpori ſunt æquales. Hi, quia nec exceſſum nec defectum habent, perfecti vocantur: cuiuſmodi numerus eſt 6. nam eius dimidium eſt 3, pars tertia 2, ſexta 1. quæ partes cõpoſitæ reddunt etiam 6. Item 28 numerus eſt perfectus: nã dimidiũ habet 14, quartã partem 7, ſeptimã 4, quartamdecimam 2, viceſimamoctauã 1: quæ partes coaceruatæ ſuo toto numerũ æqualem faciunt 28. Hi numeri perfecti, quòd rari ſint, viris bonis aſſimilantur. Itaque vt ad rem redeamus: minimus numerus, qui $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ habeat, eſt 12: huius dimidium 6, tertia 4, quarta 3. partes hæ collectæ proferunt 13: quæ à 12 ſubduci nequeunt. Quòd ſi numerus maior partes eaſdem habens ſumatur, partium ſumma maior redundabit. Ita nunquam fiet earum ſubductio, nedum quicquam reſtabit. Quare propoſitis huiuſmodi quæſtionibus, continuo priuſquam ad illas reſpondemus, nobiſcum meditemur an poſſibilia ſuggerant, ne labor irritus fruſtra ſuſcipiatur.

SI 4 eſſent 6, quis numerus eſſet 10? Priuſquã reſpondes, quære ab interrogante, quid intelligat ſermone tam ambiguo, vtrum velit 4 creſcere ad 6, an 6 minui ad 4. Etenim ſi 4 creſcunt ad 6, eadẽ ratione 10 ad 15 creſcent. Nam ſi 6 in 10 ducas, creſcent 60. quæ ſi ſeces per 4, prodeunt 15. At ſi 6 ad 4 minuere voles, ſic rationẽ facito, Si 6 fient 4, quid fient 10? Ducatur 4 in 10, & ſurgent 40. quæ diuide per 6, & exeunt 6 $\frac{2}{3}$. eouſque minuenda eſſent 10.

Itidem ſiquis ſic roget, Si $\frac{1}{2}$ de 5 eſſent 3, ipſa 5 cuius numeri eſſent $\frac{1}{4}$? Quærendum ante omnia eſt quid ſibi velit. Nam ſi dimidium de 5, quod eſt 2 $\frac{1}{2}$, creſcere debet ad 3, eadẽ ratione 5 per regulam de tribus notis creſcent ad 6, & erunt $\frac{1}{4}$ de 24. At ſi 3 minui debent ad 2 $\frac{1}{2}$, eadem ratione 5 per regulam de tribus notis minui debent ad 4 $\frac{1}{6}$. & erunt $\frac{1}{4}$ de 16 $\frac{2}{3}$.

SI 3 eſſent $\frac{1}{2}$ de 7: quæ pars 4 eſſent de 11? ſi 3 creſcere debent ad 3 $\frac{1}{2}$: ſcrutare quid ſecundum eam rationem 4 eſſe debent. & per regulam de tribus notis inuenies ea creſcere ad 4 $\frac{2}{3}$. Iam viden-

dum 4 $\frac{1}{3}$, quæ pars ſunt de 11. id quod ſcies, ſi 11 per 4 $\frac{1}{3}$ ſeces: ſic prodibũt 2 $\frac{7}{13}$. ea pars 4 erunt de 11. Nam ſecundum hoc thema 11 immota manent. Animaduertere itaq; oportet, quid ſit quod quæratur: ne reſponſum aberret à quæſito. Porrò ſi $\frac{1}{2}$ de 7 minui deberent ad 3: conuerſa ratione ſupputandũ eſſet. ſicuti in proximis ſupradictum eſt.

EXQVIRANTVR duo numeri, in quibus $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ vnius ſint, $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ alterius. Accipe aliquem numerum qui vnam ſecundã & vnam tertiam habeat, puta 54. cuius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſint 45. Poſteà vt ſcias cuius numeri illa 45 ſint vna quarta & vna quinta, per poſitionẽ vnicam inueſtigare licet hoc modo, Pone quenuis numerum, qui $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ habeat: vtpote 60. Deinde vide qui numerus ſit quarta & quinta illius: & inuenies eum eſſe 27. At tu quærebas 45. Sic igitur per regulam de tribus notis ratiocinare, Si 27 ſunt quarta & quinta de 60: quis numerus eſt cuius quarta & quinta ſunt 45? Scrutare ſequens regulam: & inuenies eũ eſſe 100. ſic 54 & 100 numeri ſunt quos quærebas. Alia etiam via, atque ea quidem compendioſa, id inueſtigari poteſt ad hunc modum, Ex minutiæ quæ ad vnum numerum vtrinque ſpectant, ſimul addantur, vt ſint vnæ minutiæ. quo fiet vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ per additionem collectæ, faciant $\frac{5}{6}$. At $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ per additionem iunctæ facient $\frac{9}{20}$. Deinde hæ minutiæ ſeorſum coaceruatæ, alteræ contra alteras annotentur. & vterque denominator in alterarum numeratorem oblique in crucis formam ducatur: numerique producti reponantur iuxta ſuum vterque denominatorem à quo ductus eſt. Ita ex ea multiplicatione 54 iuxta $\frac{5}{6}$ habebuntur, & 100 iuxta $\frac{9}{20}$. qui numeri partes eo modo, quo præſcriptum eſt, communicantes habebunt. Numerus autem qui ambobus ex obliqua multiplicatione productis inæqualiter communicat, is eſt qui ex numeratorum mutuo in ſe ductu ſurgit, videlicet 45. nam 45 ſunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ de 54. Itémque 45 ſunt $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ de 100. Hoc compendium inueniendi numeros, qui partes ad hunc modũ inæqualiter communicantes habeant: ad multos in numeris nodos explicandos plurimum iuuabit, ſi in promptu habeatur.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

54 $\frac{5}{6}$ × $\frac{9}{20}$ 100.

MERCATOR argenti libram, quæ de nota atque indicatura 8 ſcrupulorum erat, aureis 9 emit. quæro, ſi ſecũdum eam rationem velit de nota 10 ſcrupulorum emere libras 20: quot aureis conſtabunt? Pone vt libet, puta cõſtituras aureis 80: vt ſingulæ libræ væ-

neant aureis 4. Vide quid ſecũdum eã rationẽ vna libra de nota 8 ſcrupulorũ cõſtabit. id quod facies ſic ratiocinãdo, Si argenti nota de 10 profert vnius libræ pretiũ 4, quod pretiũ vnius libræ dabit nota ſcrupulorum 8? Sequere regulam de tribus notis: & inuenies eã dare $3\frac{1}{5}$. at tu ſcis eam dare 9. Quamobrẽ ſic ſupputabis, Si $3\frac{1}{5}$ prodeũt ex 80 quæ coniectura poſuit, de quo prodibunt 9? Ducantur 9 in 80: & ſurgẽt 720. quæ ſi ſeces per $3\frac{1}{5}$, in numero partitionis prodeũt 225. tot aureis libræ 20 de 10 ſcrupulorum nota conſtabunt, quarum vnaquæque pretij erit aureorum $11\frac{1}{4}$.

QVI argenti libram de 10 ſcrupulorum nota, aureis 11 emit, poſteà libras argenti 25 de alia nota aureis 200 mercatus eſt: quæro cuius notæ fuerunt? Quia earũ vnaquæque conſtitit aureis 8, ſic ratiocinabere, Si 11 aurei reddunt notam 10: quam notam reddent aurei 8? Scrutare, & inuenies $7\frac{3}{11}$. ea nota & indicatura librarum 25 erat. Hic propter facilitatem nulla poſitione fuit opus.

COMPLVRES huiuſmodi quæſtiones, & multæ etiam ex his, quas ſuprà libro tertio explicauimus, per vnicam poſitionem, adiuuante regula de tribus notis, ſolui poſſunt.

REGVLA DE DVABVS FALSIS POSITIONIBVS.

INNVMERAE queſtiones in numeris occurrũt, quæ tametſi earũ pars ſit cognita, pars ſit ignorata, per vnicã cõiecturã explicari nequeũt: at hæ per duas poſitiones ſtatim expediẽtur. In quibus ante omnia obſeruare oportet, quàm propè vtraque poſitio vel accedit ad verũ, vel à vero recedit. Itẽ ipſorũ errorũ differẽtia magnopere notanda eſt. Nã per obſeruationem approximationis vtriuſque poſitionis ad verũ, & per differentiam errorũ qui ex his inſequuntur, veritas in lucem veniet. quæ duobus modis inueniri poteſt, videlicet vel per regulas pluris & minoris, vel per differentiarũ obſeruationẽ. Itaq; de plure & minore quatuor hæc præcepta ſunt in primis ediſcẽda. Primũ, Si vtraque poſitio plus quàm verũ cõijcit: alterum plus ſubducere ab altero plure oportet. Secundũ, Si vtraque poſitio minus quàm verũ affert, alterum minus ab altero minore ſubtrahẽdum eſt. Tertiũ, Si prior poſitio plus, poſterior minus profert, tum plus & minus in vnũ ſunt addẽda. Quartum, Si prior poſitio minus, poſterior plus cõiectat, tum minus & plus in vnũ coniungãtur. Ita cum his quatuor modis coniectura varietur, primis eorũ duobus videlicet ſiue vtraque coniectura plus, ſiue vtraque minus ponat, alterius ab altero ſub-

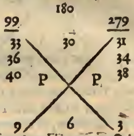
ductio fieri debet: at poſtremis duobus, videlicet quãdo prior poſitio plus, poſterior minus cõijcit, vel ẽ conuerſo: pluris & minoris additio neceſſaria eſt. Et quo facilius has præceptiones ſtudioſi memoria tenerẽt, Morus, rogatu noſtro, redegit eas in hoc carmẽ,

A plure deme pluſculum,
Minus minori ſubtrahe:
Pluri minus coniungito,
Atque ad minus plus adijce.

HARVM primæ regulæ in qua vtraque poſitio plus affert, ſenſus eſt, Si per priorem poſitionẽ atque item per poſteriorem plus quàm veritas exit: tunc alter error plus afferens ab altero plus afferẽte ſubducẽdus eſt: & id quod reſtat, diuiſor totius operationis erit. Poſtea prior error ducendus eſt in poſitionẽ poſteriorẽ. itémque error poſterior in poſitionẽ priorẽ ad formã obliquæ crucis: & numerorum ex his duabus multiplicationibus productorũ alterius ab altero fit etiam ſubductio. Deinde id quod reliquum eſt, per errorum differentiam diuiditur, atque ita numerus partitionis veritatem profert. Exemplum præbeamus. Tres mercatores aureos centum lucrifactos ſic diuiſerunt, vt ſecundus tres aureos plures quàm primus caperet, tertius quatuor plures quàm ſecundus: Libet inueſtigare, quot aureos quiſque habuit. In primis magna crux obliqua, formam referẽs X literæ Græcæ, quam vulgus crucẽ diui Andreæ vocat, in abaco depingenda eſt. Poſt id factum coniecturas aggrediamur, & ponamus primum mercatorem accepiſſe 33 aureos: quo fiet vt ſecundus 36, tertius 40 debuerit accipere. quæ ſummæ collectæ faciunt 109. At tantũ 100 erant diuiſi. ita in 9 errauimus. qui error ex illorũ 33 falſa poſitione, quæ nimia erat, natus eſt. Eapropter illam poſitionem 33 ad verticem ſiniſtrũ depictæ crucis ſignemus: errorem verò ex ea inſecutum qui capit 9, annotemus ad pedem ipſius crucis ſiniſtrum. Et quia plus quàm verum coniectura peperit, P litera ad ipſum plus ſignificandum, inter ſiniſtrum verticem & ſiniſtrum pedem in intimo crucis ſinu ſcribatur. Deinde quia priore coniectu parum profecimus, iterum tentantes, fingamus primum mercatorem aureos 31 habuiſſe: ea ratione ſecundus 34, tertius 38 accepit. quorum ſumma collecta profert 103. At tãtum 100 ſunt diuiſi. Quocirca ſecũda coniectura etiã ipſa plus quàm verum attulit, & errauit in 3. Quare poſitio illa ſecunda de 31 ad verticẽ crucis dextrum ſtatuenda eſt, errórque ex ea inſecutus ad pedem eius dextrũ ſubnotetur: & P litera ad plus

ſignificandum inter dextrum verticem & pedem dextrũ in intimo ſinu ponatur. Deinde minor error 3 à maiori 9 ſubducatur. & 6 quæ reſtabunt, medio ſpatio inter vtrunque errorẽ notanda ſunt. Poſtea prior error 9 ducatur in ſecũdam poſitionem 31,& enaſcẽtur 279. Item ſecundus error 3 ducatur in priorẽ poſitionem 33,& producentur 99. quarum ſummarum productarũ minor 99 ſubducatur à maiore 279, & ſupererũt 180. Ea ſi per errorum differentiã videlicet 6,ſecẽtur,numerus partitionis proferet 30,quæ vera ſumma primi erat. Primus nanque 30, ſecundus 33, tertius 37 habuit. quæ ſummæ coaceruatæ faciũt 100,ſicut thema propoſuit. Ita demum veritas per duas falſas poſitiones inuenta medio ſpatio inter crucis vertices,in quibus hæ ſignatæ ſunt,annotanda eſt.

1.poſitio.



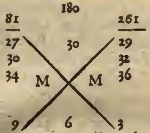
2.poſitio

SECVNDAE regulæ,in qua vtraque poſitio minus affert, ſenſus pene primæ ſimilis,huiuſmodi eſt,Si per priorẽ poſitionem,atque item per poſteriorẽ minus quàm veritas habetur:alter error ab altero ſubduci debet.& reliquum erit diuiſor. Tum prior error in poſteriorem poſitionem , & error poſterior in poſitionẽ priorem ducatur:productorúmque numerorũ alterius ab altero fit ſubductio.& quod reliquum eſt per errorum differentiam ſecatur. Sic in numero partitionis veritas apparebit. Exemplum in themate modo dato præbeamus, & ponamus primum mercatorẽ habuiſſe 27, ſecundum 30,tertium 34: quæ ſummæ collectæ faciunt 91. At 100 ſunt quæſita. In 9 igitur erratum eſt. Itaque poſitio 27 in ſiniſtro crucis vertice, error 9 in ſiniſtro pede ſtatuatur. & quia error minus attulit,M litera quæ minus indicet, in ſiniſtrũ receſſum inter poſitionem & errorem condatur. Iterum deinde coniectura tentemus: & fingamus primũ mercatorẽ accepiſſe 29, ſecũdũ 32,tertiũ 36. quæ vniuerſa faciunt 97. At ſcopus erat 100. ſic 3 de numero deſtinato deſunt. Quocirca ipſa poſterior poſitio 29 in dextro crucis vertice ſignetur, & error poſterior 3 in pede dextro:atque M litera,quòd in minus ſit erratum,in dextro receſſu inter poſitionem

p.ij.

& errorem reponatur. Poſt id minor error 3 à maiori 9 ſubducatur:& 6 quæ reſtāt,medio inter errores ſpatio ſtatuantur. Tū prior error 9 ducendus eſt in poſteriorē poſitionem 29:& naſcentur 261. Itē poſterior error 3 ducendus eſt in priorē poſitionem 27,& producentur 81. Horū autem numerorum productorū ſi minor à maiore ſubtrahatur,relinquentur 180. quæ ſi per errorum differentiā videlicet 6,ſecentur: numerus partitionis verum primi numerum 30 monſtrabit.

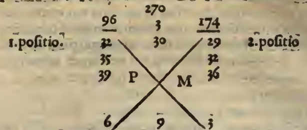
1. poſitio



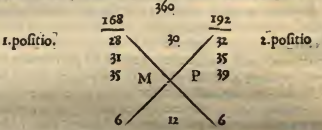
2. poſitio.

TERTIAE regulæ, in qua prior poſitio plus, poſterior minus affert,hic ſenſus eſt,Si per priorem poſitionem plus, per poſteriorem autē minus quàm veritas inuenitur : alter error ad alterū addi debet,vt amborū ſumma diuiſor fiat. Præterea poſtquam prior error in poſitionem poſteriorem, & error poſterior in poſitionem priorem ducti erūt: numeri ex his multiplicationibus producti in vnum ambo addendi ſunt. Quo fiet,vt ſi eorum ſumma per additorū errorū ſummam ſecetur,numerus partitionis veritatem in lucem proferat. Thema datū rurſus tractātes exēplum afferamus:& ponamus primū mercatorē accepiſſe 32, ſecūdum 35, tertiū 39. quæ ſummæ collectæ faciūt 106:ſic 6 redundāt,quum 100 ſint quæſita. Poſitio igitur 32 ad ſiniſtrū crucis verticē notetur,atque error 6 ad pedem eius ſiniſtrum, & P litera quæ in plus erratū eſſe moneat, inter poſitionē & errorē in ſiniſtro crucis ſinu ſcribatur. Et quia coniectura nimium attulit,paulum infra tentemus : fingamúſque primum mercatorem habuiſſe 29,ſecundum 32,tertium 36. qui numeri collecti proferunt 97: atque ita 3 deſunt de numero 100 deſtinato. Eapropter ipſa ſecunda poſitio 29 ad dextrum crucis verticem,error autem 3 ad pedem eius dextrū ſignetur: & M litera,quæ in minus erratū eſſe mōſtret, in crucis dextro ſinu inter poſitionē & errorē reponatur. Deinde poſt amborum errorū additionē quæ facit 9,prior error 6 in poſteriorē poſitionē 29 ducatur,& enaſcentur 174. Itē poſterior error 3 in poſitionē priorem 32 ductus, educet 96. Qui numeri producti ambo in vnum additi cōponūt 270.

Ea ſi per amborũ errorum collectã ſummã, videlicet 9 ſecentur, numerus partitionis 30 procreabit, quæ vera primi ſumma erat.



QVARTAE regulæ, in qua prior poſitio minus, poſterior plus cõiectat, idem per omnia ſenſus qui tertiæ eſt: niſi quòd prior poſitio quæ minus affert, atque error ex ea inſequutus, ſiniſtrã crucis partem tenere debent: poſterior verò poſitio cum ſuo errore dextram. Cætera omnia eodem modo quo in tertia regula factum eſt, expediantur. Exemplum in themate iam dato ſpectandum ante oculos ſubiecimus, quod quiuis facile ſine præeunte explicabit.



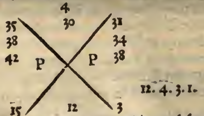
DIFFERENTIARVM OBSERVATIO.

PLVRIS & minoris regulis expeditis, differentiarum obſeruationẽ ab eiſdem præceptionibus pendẽtem, quæ etiã ipſa per duas falſas poſitiones expeditur, his adiungamus. Et quo magis manifeſtum ſit quãtulum hic explicandi modus ab illo iam dato differt, idẽ thema ſeruemus. Et fingamus primũ mercatorẽ accepiſſe 35, ſecundum 38, tertium 42, quorum ſumma collecta facit 115. ſic coniectura 15 plura quàm opus erat peperit. Quare poſitio 35 ad ſiniſtrũ crucis verticẽ, & error ex ea natus 15 ad pedem eius ſiniſtrũ ſtatuatur, & P litera ad plus denotandum in ſiniſtro ſinu cõdatur. Et quia cõiectura plus iuſto protulit, iterũ tẽtemus. & ponamus primũ mercatorẽ habuiſſe 31, ſecundũ 34, tertiũ 38: qua ratione omnes acceperunt 103, cũ tamen tantum 100 ſint di-

uiſi. Ita ſecunda poſitio in 3 quæ redundât,errauit. Quocirca ipſa poſitio 31,ad verticem crucis dextrū:error 3 ad pedem eius dextrū: P litera,ad plus ſignificandū,in dextro ſinu reponatur. Poſteà poſitionū ipſarum differētia , per minoris à maiore ſubductionē deprehenſa,paulò ſupra mediū inter vtranque ſpatiū notetur: ea eſt 4. Atque itidem errorū differētia,per alterius ab altero ſubductionem inuenta,medio inter eos ſpatio reponatur: ea eſt 12. Deinde conſyderemus priorem poſitionem 35 occultū in ſe exceſſum & adhuc ignotū habentē,procreaſſe errorem excedentem in 15,& ſecūdam poſitionē 31 exceſſum etiā ignotū habentē,edidiſſe errorē excedentem in 3 .Ex quo videre licet poſitionū differentiā 4,quæ inter earū vtranque media eſt, peperiſſe differētiam errorum 12, quæ media eſt inter vtrūque errorē.Et quoniā prior poſitio ſuperat ſecundam in 4,eo magis abducit à veritate per 12 quàm ſecunda. At ſecunda poſitio quia minor eſt priore per 4, eo magis appropinquat ad veritatē.Nihilominus tamen veritatē excedit in 3. Quare ſi magis fuiſſet imminuta,propius ad veritatē acceſſiſſet, & minorem aliquanto genuiſſet errorem . Eapropter inueſtigare oportet ad quem numerum ſecunda poſitio 31 ſit minuenda,vt nihil erroris pariat.Hoc autem manifeſtū fiet,ſi conſyderemus tres numeros proportionales nobis eſſe notos . Primus eſt poſitionum errantiū differētia,quæ eſt 4.Secūdus,qui ex ea naſcitur,eſt errorū differentia 12.Tertius numerus eſt ſecundus error 3 ex ſecūda poſitione errante exiens:qui magis ad verū appropinquat per 12 , quàm prior error: eo quòd ſecunda poſitio minor eſt priore per 4 . Quocirca quæ proportio eſt inter errorū differentiā 12 longius à veritate diſtantē,& errorem ſecundū 3 propius ad verū accedentē,hoc eſt inter vtrâque ſobolem:eadem eſſe debet inter vtrâque genitricē, videlicet inter poſitionū differentiā 4,quæ veritatē intercludēs peperit differentiā errorū:& illā ſecūdæ poſitionis differētiā à vero nos excludentem, & adhuc ignotam, quæ exceſſum in ſecundo errore edidit . Et permutatim,quæ proportio eſt inter errorum differentiam 12,& differentiam poſitionum 4,quæ eam peperit: eadem inter ſecundum errorem 3, & à vero nos excludentē ſecūdæ poſitionis differētiā,quæ eū ædidit, & adhuc ignota eſt,eſſe debet. Quàobrem regula de tribus notis quartū ignotum proferentibus, rem totam patefaciet, nobis ſic conſyderantibus, Si errorum differentia 12 venit ex falſarum poſitionum differentia veritatem intercludente,quæ eſt 4:de qua falſæ poſitionis differentia veritatem abſ-

condente veniet ſecundus error 3. Ducantur 3 in 4:& ſurgent 12. quæ ſecta per 12: in numero ſectionis edunt 1. tantū minui debet ſecunda poſitio 31, vt veritas in lucē veniat. Illa enim vnitas erat, quæ exceſſum in ſecunda poſitione faciens ſecundū errorē in 3 peperit. qua ſubducta, tollitur omnis error, & 30 reſtāt. qui numerus veritatē exprimens medio inter vtrāque poſitionē ſpatio notetur.

QVOD ſi cui ſcire libet quis erat ille numerus qui in priore poſitione exceſſū fecit, cōſyderet quæ proportio eſt inter errorū differentiā 12, & priorē errorē 15, eādem eſſe debere inter poſitionū differētiā 4, & illā prioris poſitionis differētiā quæ à vero nos excludit, & adhuc ignota eſt. Et permutatim, quæ proportio eſt inter errorū differētiā 12, & poſitionū differētiam 4, eādem eſſe debere inter priorē errorē 15, & illā prioris poſitionis differentiā à vero nos excludentē & ignotā. quare tractās regulā de tribus notis, tertio loco ſtatuat primū errorē 15, hoc modo, Si differentia errorū, quæ eſt 12, venit ex falſarū poſitionū differētia, quæ eſt 4: de qua falſæ poſitionis differentia veritatē in priore poſitione occultante naſcetur error primus 15. Ducantur 4 in 15, & producētur 60: quæ ſecta per 12, educent 5. Is exceſſus in priore poſitione peperit errorem in 15. quare ſi ſubducatur, reſtat verus numerus 30. Sic ſublata redundāte differētia, quæ facit exceſſum: veritas ſola relicta ſeſe offert: ſiue exceſſum in ſecunda poſitione, ſiue in priore inueſtigare, atque auferre libet. Atque ita per duas falſas poſitiones, quarū vtraque plus iuſto conijcit, veritas eruitur, per obſeruationē proportionū quæ ſunt inter differentias errorū & differentias poſitionum: adiuuante regula quatuor proportionalium, quorum tria ſunt nota.

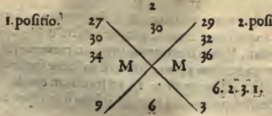


AD EVNDEM modum per differētiarum obſeruationem res expediatur: etiam ſi vtraque poſitio minus quàm verū afferat. Veluti ſi ponamus primum mercatorem habuiſſe 27, ſecundm 30, tertium 34: quæ ſummæ collectæ faciunt 91: cum 100 ſint quæſita. Quare poſitio 27 ad ſiniſtrum crucis verticem, error 9 ad ſiniſtrū pedem, M litera in medio ſinu reponatur. Ite-

rum tentantes,fingamus primum accepiſſe 29, ſecundum 32, tertiū 36, quæ ſimul addita faciunt 97.ſic 3 de 100 deſunt. Quare ea omnia à dextra,ſuo quæque loco ſtatuantur,videlicet poſitio ad verticem,error ad pedem, M litera ſinu medio. Deinde quia vtraque coniectura minus attulit, differentias errorum & poſitionum per ſubductionem capiemus. Poſtea conſyderare oportet priorem poſitionem 27,defectum adhuc ignotum in ſe habentē,procreaſſe errorem,cui 9 deſunt: & ſecundā poſitionem 29 defectum etiā ignotum habentem, edidiſſe errorem, cui deſunt 3. Quo fit manifeſtū poſitionum differentiam 2,quæ inter earum vtranque media eſt, peperiſſe errorum differentiam 6,quæ media eſt inter vtrunque errorem. Atque ideo,vt veritatem exquiramus,ſic ratiocinemur, Si 6 differentia errorum naſcitur ex poſitionum differentia 2 veritatē intercludente,de qua ſecundæ poſitionis differentia veritatem occultante naſcetur ſecundus error 3? Operare ſecundū regulā quatuor proportionalium,& inuenies eum naſci ex 1.quod quia ſecūdæ poſitioni defuit,etiam ipſa ſecunda cōiectura minus iuſto protulit. Quapropter vnitas addita veritatem exprimit.

AT SI ſcire voles quantum priori poſitioni defuit, in regula de tribus notis tertio loco quæſtionem de primo errore ſtatue hoc modo, Si errorum differentia 6 venit à 2 differentia poſitionum, de qua falſæ poſitionis differentia veritatē in priore poſitione arcente,naſcetur primus error 9? Regulam ducem ſequens deprehēdes illam fuiſſe 3. Ipſa igitur differentia addita ad primam poſitionem,defectum eius replet.

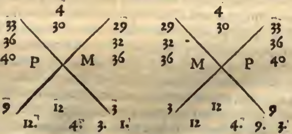
SIC quando per differentiarum obſeruationem veritas inquiritur,ſi vtraque poſitio minus affert: id quod vel primæ coniecturæ vel ſecundæ deeſſe per regulam de tribus notis deprehēditur,ſuppletur. ſicut quando vtraque poſitio plus profert, id quod ſiue in priore coniectura, ſiue in poſteriore redundantem exceſſum facere per regulam de tribus notis inuenitur, auferendum eſt, vt veritas exprimatur. ſicuti in proximo ſuperiori exemplo videre licuit.



NVNC videamus quomodo per differentiarum obſeruationem res expedietur, quando prior poſitio plus, poſterior minus affert, vel è conuerſo. Et in themate iam dato fingamus primũ mercatorem accepiſſe 33, ſecundũ 36, tertium 40. Ea in vnam ſummã collecta faciunt 109: ex quo liquet 9 redundare. Quare à ſiniſtra crucis, poſitio verticem, error pedẽ, P litera, quæ plus coniectum eſſe demonſtret, ſinũ occupet. Iterúmque tentantes, ponamus primũ mercatorem habuiſſe 29, ſecũdum 32, tertium 36. quæ per additionẽ coaceruata faciunt 97: atque ita 3 de 100 deſunt, ea dextrã teneant: M litera, ad minus indicandũ, in ſinu dextro repoſita. Deinde conſyderare oportet prioris poſitionis exceſſum edidiſſe exceſſum prioris erroris, ſecũdæ autem poſitionis defectum peperiſſe defectũ erroris ſecundi. Quocirca hi duo errores, quia alter in plus, alter in minus peccat, in vnum ſunt addendi, & ſurgent 12: quæ errorũ cumulatio venit ex differentia poſitionum, videlicet 4. Nam quia prior poſitio 9 plura quàm oportuit attulit, ſecunda autem poſitio per 4 tantũ ab ea differens non ſolum exceſſum illũ prioris abſtulit, ſed etiam plus quàm iuſtum erat auferens, defectum ſuperinduxit. ideo tam ad auferendũ prioris poſitionis exceſſum, quàm ad ſupplendũ defectum poſterioris, fit iſta errorum additio: vt per eam temperamẽtum inter exceſſum & defectum inueniatur. Nam ita proportionũ ratio in vtranuis partẽ, ſiue exceſſus, ſiue defectus vim ſuã porrigere poteſt. Etenim ſi in dextram ad defectũ reſpicimus, quæ proportio eſt inter amborum errorum cumulationem & ſecundũ errorem, eadem inter poſitionum differentiam exceſſum & defectũ cumulantem, & illam differentiam quæ in ſecũda poſitione veritatem occultat, eſſe debet. Et permutatim, quæ proportio eſt inter amborum errorũ cumulationem, & poſitionum differentiã exceſſum & defectum cumulantẽ, ex qua naſcitur, eadem inter ſecundum errorem & illam ſecundæ poſitionis differentiam verum abſcondentem, ex qua naſcitur, eſſe debet. Atque eapropter ſi ſcire voles quis ſit numerus qui in ſecunda poſitione defuit, vt iuſtum ſuppleret, conſyderare oportet, ad hunc modum, Si cumulatio errorum quæ eſt 12, naſcitur à poſitionum differentia veritatem occulente, quæ eſt 4, de qua ſecundæ falſæ poſitionis differentia verum abſcondente naſcetur ſecundus error 3? Multiplica 3 in 4, & producentur 12: quæ per 12 ſecta mõſtrant 1, in numero partitionis. Hoc autem additum ad ſecundam poſitionẽ 29, qui numerus vno deficitur, ſupplet id quod

defuit:& fiunt 30, qui numerus verus primi mercatoris erat.

AT SI ſcire voles quantum priori poſitioni redundanti detrahendum erat, vt ſolum exceſſum auferret,& iuſtum numerum relinqueret, proportionum ratio à ſiniſtra conſyderanda eſt. nam ſicut amborũ errorum cumulatio ad priorem errorẽ ſe habet, ſic poſitionum differentia ad illam differentiã quæ in priore poſitione veritatẽ occultat, ſe habere debet. Et permutatim, ſicut amborũ errorum cumulatio ſe habet ad differentiam poſitionũ, ex qua naſcitur: ſic prior error ad illã prioris poſitionis differentiam verũ intercludentẽ, ex qua naſcitur, ſe habere debet. Et ideo in operatione facienda per regulam de tribus notis, tertio loco forma quæſtionẽ de primo errore qui plus attulit, perinde quaſi verſo exẽplo, poſitio prior fuiſſet minor,& ſecũda maior, hoc modo, Si 12 cumulatio errorum naſcitur à poſitionũ differentia 4 veritatem præcludente: de qua prioris falſæ poſitionis differentia veritatem abſcondente, naſcetur primus error 9? Ducantur 4 in 9,& creſcent 36: quæ ſecta per 12 in numero partitionis edunt 3: is exceſſus erat, qui primam poſitionem 33 errare fecit. Quocirca dempto illo exceſſu, ſuperſunt 30: qui verus erat primi mercatoris numerus. Itaque quando altera poſitio plus, altera minus affert, ſi per regulam de tribus notis exquiris numerũ qui exceſſum in poſitione fecit, is inuentus ſubducendus eſt. At ſi numerum inquiris qui poſitioni defuit, is cõpertus ad eam eſt addendus, vt veritas appareat.

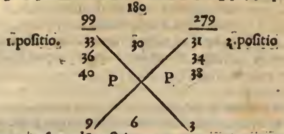


SI QVISPIAM ſcire cupit quãdo per differentiarũ obſeruationẽ res expeditur, cur ſiue vtraque poſitio, plus ſiue vtraq; minus affert, alterius poſitionis ab altera, atque alterius erroris ab altero ſit ſubductio: Animaduertere debet ad ea quæ dicta ſunt, nempe quòd diſtãtia à veritate, vel appropinquatio ab veritatem, per differentiam alterius poſitionis ab altera, atque alterius erroris ab altero deprehenditur: ipſa autem numero-

rum differentia per ſubductionem inuenitur. Ex proportione autem illarum differentiarum, quæ mediæ ſunt inter errores & poſitiones, veritas inueſtigata per regulam de tribus notis in lucẽ venit, ſiue in dextram partem, ſiue in ſiniſtram reſpicias. Nam ſi in dextram: quæ proportio eſt inter errorum differentiam & ſecundum errorem qui magis ad veritatem appropinquat, eadem inter poſitionum differentiam quæ differentiam errorum peperit, & illum ſecundæ poſitionis numerũ qui veritatem adhuc abſcõdens ſecundum errorem edidit, eſſe debet. Et permutatim, quæ proportio eſt inter errorum differentiam, & differentiam poſitionum genitricem ſuam, eadem inter ſecundum errorem, & ignotum numerum matrem ſuam erit. At ſi in ſiniſtram reſpicias: ſicut errorum differentia ſe habet ad priorem errorem quæ longius à vero recedit, ſic poſitionum differentia ad illam prioris poſitionis latentem differentiam, quæ priorem errorem edidit. Et permutatim, ſicut errorum differentia ſe habet ad differentiam poſitionum, ſic prior error ad illam prioris poſitionis latentem differentiam, quæ ipſam edidit, ſe habere debet. Porrò niſi hæc proportionũ ratio in differẽtijs poſitionum atque errorum ineſſet, nulla vnquam quæſtio per regulas falſarum poſitionũ ſolui quouiſmodo poſſet. Succedens autem illa quatuor proportionalium regula, quæ quartum numerum ignotum latere non ſinit, per tres numeros notos ſtatim eum profert, & rem totam explicat.

A T S I ſcire voles cur in regulis pluris & minoris, ſiue vtraque poſitio plus, ſiue vtraque minus affert, prior error ducitur in ſecundã poſitionem, & ſecundus error in poſitionem priorẽ, poſteáque alterius producti ab altero, & alterius erroris ab altero fit ſubductio: Ratio hui⁹ rei pẽdet partim ab his quæ de differentiarũ proportione dicta ſunt, partim à prima & ſecũda regula Euclidis libro ſecũdo: quas quanquam ille de lineis poſuit, quia tamen in numeris etiã veræ ſunt, nos de numeris eas demus, ad hunc modũ, Si fuerint duo numeri quorum vnus in quotlibet partes diuidatur, illud quod ex ductu alterius in alterũ fiet, æquũ erit his quæ ex ductu numeri indiuiſi in vnãquanq; partẽ numeri particulatim diuiſi producentur. Itẽ ſi fuerit numerus in partes diuiſus, illud quod ex ductu totius in ſeipſũ fit, æquũ erit his quæ producẽtur ex ductu eiuſdẽ in omnes ſuas partes. Ita quãdo prior error in ſecundam poſitionem ducitur, perinde eſt quaſi differentia errorũ & ſecũdus error, qui numeri ſunt partes primi erroris,

ducantur in eãdem ſecundam poſitionem. Veluti in primo exemplo de regulis pluris & minoris dato, vbi vtraq; poſitio plus affert,

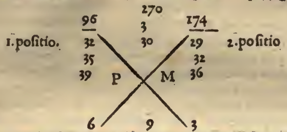


prior error 9 in ſecundã poſitionem 31 ducitur, & procreatur, 279: ſic ſi errorum differentia 6 ſeorſum in 31 ducatur, naſcentur 186: & ſi 3 ſecundus error in 31 ducatur, fient 93: qui numeri producti ambo ſimul additi faciunt 279. Similiter cum differentia poſitionũ 2, & ſecunda poſitio 31 partes ſint primæ poſitionis 33, ducentes ſecundum errorem 3 in primam poſitionem 33, producemus 99: qui numerus productus æqualis eſt numero producendo, ſi ipſe ſecũdus error 3 ſeorſum in poſitionũ differentiam 2, & poſtea in 31 ducatur: ſic quoque ſurgent 99. Itaque cum inter differentiam errorum & ſecundũ errorem ea ſit proportio, quæ eſt inter differentiã poſitionum & exceſſum in ſecunda poſitione: quando multiplicamus differentiam errorum 6 in ſecundam poſitionem 31, facimus 186, & ducimus eam non ſolum in totum verum numerum 30, ſed etiam in exceſſum, qui veritatem abſcõdit, videlicet 1. Et cum multiplicamus ſecundum errorem 3 in ſecundam poſitionem 31, facimus 93: quæ addita ad 186, creant 279. Horum autem vtrunque tacite fecimus ducentes primum errorem in ſecundam poſitionem. Ita 99 ſupra verũ addidimus: quod tantũ eſt quantum capit multiplicatio ſecundi erroris 3 in primam poſitionẽ 33. Nam multiplicatio differentiæ errorum 6 in ſecundæ poſitionis exceſſum 1, quæ tacite facta eſt quando duximus 6 in 31, æquiparatur multiplicationi ſecundi erroris 3 in differentiam poſitionum 2. Quia cũ illa quatuor ſint proportionalia, ſicuti ſupradictum eſt: quæ ab extremorum multiplicatione veniunt, æqualia ſunt his quæ à mediorum, per regulam de tribus notis. Et multiplicatio ſecundi erroris 3 in ſecundam poſitionem 31, quæ tacite facta eſt quando duximus primum errorem in ſecundam poſitionem, facit 93: ſic 99 ſupra veritatem ſunt adiecta. Quare ſubductio numeri per multiplicationem ſecundi erroris in primam poſitionem producti, qui etiam

eſt 99, exceſſum omnem à veritate aufert, & numerum verum velut in turba latitantem relinquit: ſed quis ſit, adhuc ignoramus. Diuiſio autem facta per errorum differentiam 6, quiſnam ſit oſtẽdit, videlicet 30. Nam quando aliquis numerus ex duorum multiplicatione producitur, eius diuiſio per alterum facta profert alterum in numero ſectionis. Eadem ratione ſubductio alterius producti ab altero, & alterius erroris ab altero fiet, quãdo vtraque poſitio minus afferet.

QVÒD ſi ſcire deſyderas quando per differentiarum obſeruationem res expeditur, cur errorum ſit additio, ſiue prior poſitio plus, poſterior minus affert, ſiue è conuerſo: Ratio illa eſt, quam cum exempla daremus, attigimus: videlicet quòd ſi contingat priori poſitioni aliquid ſupereſſe, ſecundæ aliquid deeſſe, differentia poſitionum non ſolum exceſſum prioris poſitionis aufert, ſed etiam defectum in ſecunda inducit. Vel ſi eueniat priorem poſitionem defectum afferre, ſecundam exceſſum, tum differẽtia poſitionum non ſolum id quod priori poſitioni deeſt, ſupplet, ſed plus iuſto aggregans, exceſſum in ſecunda poſitione parit. Quocirca ad inueniendum temperamẽtum inter exceſſum & defectum, prior error ex priore poſitione veniens & poſterior exiens ex poſteriore, in vnum coniungũtur: quæ errorum cumulatio inter duos errores media, in vtranuis partem ſiue exceſſus ſiue defectus comparari poteſt. Nam ſi ad defectum reſpicimus, Sicut errorum cumulatio à differentia poſitionum defectum & exceſſum accumulante naſcens ſe habet ad illum errorẽ qui naſcitur ex defectu, ſic poſitionum differẽtia, ad illam falſæ poſitionis latentem differentiam quæ defectum edidit. Et permutatim, ſicut errorum cumulatio ſe habet ad differẽtiam poſitionum, ſic error defectum patiens ad illam differentiam quæ defectum attulit, ſe habere debet. At ſi in alteram partem ad exceſſum reſpicimus, Sicut errorum cumulatio ſe habet ad errorem qui natus eſt ab exceſſu, ſic differentia poſitionum ad illam falſæ poſitionis latẽtem differentiã quæ peperit exceſſum. Et permutatim, ſicut errorum cumulatio ſe habet ad differentiam poſitionum, ſic error ab exceſſu ad illam differentiam quæ exceſſum protulit, ſe habere debet. Atque ideo regula de tribus notis facile quartam illam ignotam ſiue exceſſus ſiue defectus differentiam quæ verum occultat, manifeſtabit. Ea verò cognita ſi exceſſum affert, ſubducenda eſt: ſi defectum, addenda, vt verus numerus exeat.

PORRÒ ſi ſcire voles cur in regulis pluris & minoris, ſiue prior poſitio plus, poſterior minus affert, ſiue è conuerſo, ſemper prior error ducitur in ſecundam poſitionem, & ſecundus error in poſitionem priorem, poſteáque alterius producti ad alterum fit additio, & amborum ſumma per ſummã errorum diuiditur, vt veritas exeat: Ratio tota huius rei pendet partim ab his quæ de ratione proportionũ modo ſunt dicta, ſine quibus huiuſmodi quæſtiones per falſarum poſitionũ regulas explicari nequeunt, partim à prædictis Euclidis regulis prima videlicet & ſecunda, libro ſecundo. Et vt in exemplo verſantibus res magis eluceat, repetamus illud quod in tertia pluris & minoris regula ſuprà datũ eſt, in quo prior poſitio plus, poſterior minus affert: vbi prior error 6 ductus in ſecundã poſitionem 29, profert 174. ſecundus autẽ error 3 ductus in poſitionẽ priorẽ 32, producit 96: qui numeri producti ambo cõiuncti faciũt 270, quæ ſecta per 9 ꝓferũt 30.



HIC multiplicatio prioris erroris 6 in ſecũdam poſitionem 29, quæ procreat 174, perinde eſt ac ſi ipſe prior error duceretur in veritatem 30, & fierent 180: præterquã quòd tot vnitates multiplicationi prioris erroris in ſecundã poſitionem, deſunt ad æquandam eam veritati, quot multiplicatio prioris erroris in id quod veritati in ſecũda poſitione defuit, addere poteſt. Quocirca quia 1 defuit ſecundæ poſitioni, quod ductũ in 6 crearet 6: ideo numerus productus ex multiplicatione prioris erroris in ſecundã poſitionem 174, per 6 differt à numero qui produceretur ex multiplicatione prioris erroris in veritatem, qui eſſet 180: qui numerus per 6 ſuperat 174. Similiter multiplicatio ſecũdi erroris 3 in priorem poſitionem 32, quæ facit 96, perinde eſt acſi ipſe ſecundus error 3 duceretur in veritatẽ 30, & procrearentur 90: niſi quòd multiplicatio ſecundi erroris in priorem poſitionẽ, per tot vnitates ſuperat multiplicationem ſecundi erroris in veritatem; quot multiplicatio ſecundi erroris in id quod in priore poſitione veritatem excedit,

producere poteſt. Quare cum in priore poſitione exceſſus ſupra veritatem ſit 2, qui ductus in ſecundũ errorem 3, creat 6: ex ea multiplicatione ſecundi erroris in priorẽ poſitionẽ quæ facit 96, 6 plura producuntur quàm procreari deberent ſi ipſe ſecũdus error 3 in veritatẽ 30 fuiſſet ductus, & crearẽtur 90. Illa autẽ 6 quæ hic veritatem excedũt, in priore multiplicatione prioris erroris in ſecũdã poſitionem, veritati defuerũt. Et ita defectus ab exceſſu ſuppletur. Nam quæ proportio eſt inter exceſſum prioris poſitionis 2, & priorem errorẽ ex eo natũ 6, eadem inter defectũ ſecundæ poſitionis 1 & ſecundum errorem ex eo natum 3, omnino erit. Et permutatim, quæ proportio eſt inter exceſſum prioris poſitionis 2, & defectum ſecũdæ poſitionis 1, eadem erit inter priorem errorẽ 6, & ſecundũ errorem 3. Quare cũ ſint 4 numeri proportionales, quæ ab extremorũ multiplicatione producũtur, æqualia ſunt his quæ à mediorum: tantũ enim faciunt bis tria, quantũ ſemel ſex. Quamobrẽ ſi ambo numeri ex obliqua errorum in poſitiones multiplicatione producti cõiungãtur, alter alterius vitiũ ſemper corriget. Atque is cui deeſt, alterius exhauriet exceſſum: & is cui ſupereſt, alteri⁹ ſupplebit defectũ. Qua ratione res ad æqualitatẽ reducetur: & fiẽt 270. Idem autẽ numerus ſimiliter etiã producetur, ſi vterq; errorũ ſeorſum in veritatẽ 30 ducatur. Nam 6 in 30 ducta creant 180: & 3 in 30 ducta cõponunt 90: quæ ſimul addita faciunt etiã 270. Quamobrẽ cum ſumma productorũ ex obliqua errorũ in poſitiones multiplicatione, ſit æqualis ſummæ productorũ ex vtriuſque ſeorſum erroris in veritatẽ ductu, Eáque multiplicatio vtriuſque ſeorſum erroris in veritatẽ, æqualis ſit amborũ errorum ſimul additorũ ſummæ in veritatẽ ductæ, per prædictã Euclidis primã regulã ſecũdi: Neceſſe eſt, ſi ipſa errorũ ſumma cumulata quæ eſt 9, ſummã productorũ ex obliqua errorũ in poſitiones multiplicatione videlicet 270 diuidat, ipſa veritas 30 in numero ſectionis in lucẽ prodeat. Nã quãdo numer⁹ aliquis ex duorũ multiplicatione ꝓducit, idémque per eorũ alterũ diuidit, in numero partitionis alter apparebit.

EXPEDITIS falſarum poſitionum regulis, quo magis ſtudioſi in eis exerceantur, quæſtiones aliquot, quæ per eas ſolui poſſunt, hic ſubijciemus.

SOCII tres habuerunt communes aureos 44, quorũ ſecundus bis tantũ quantum primus, atque eo amplius aureos 4 cõtulit: tertius quantũ ambo reliqui, atque eo amplius aureos 6: quæro, quantũ ab vnoquoque collatũ eſt? Experire

per datas regulas:& comperies primum contuliſſe aureos 5,ſecundum 14,tertium 25.

TRES panni telæ aureis 250 ſunt emptæ: quarum ſecunda bis tanti,quanti prima conſtitit,atque eo pluris aureis 10: tertia bis tanti, quanti aliæ duæ,atque eo pluris aureo vno;quæro,quanti tela quæque conſtitit? Tenta per datas regulas, & inuenies primam aureis $24\frac{1}{3}$ emptam eſſe,ſecundã aureis $58\frac{2}{3}$, tertiam aureis 167.

OBSONATOR quiſpiam emit in cœnam domini gallinas 3,perdices 4,phaſianos 5,nummis 86:perdix quiſque nummis 3 pluris quàm gallina conſtitit : phaſianus quiſque nummis 7 pluris quàm perdix:quæro, quanti quæque auis empta eſt? Tentans per datas regulas comperies gallinam quanque nummis 2 , perdicem quenque nummis 5 , phaſianum quenque nummis 12 conſtitiſſe.

CUBITI 6 panni rubri, & 4 panni viridis valẽt aureos 36. Eodem pretio cubiti 9 panni rubri,& 7 panni viridis valent aureos 57: quæro, quanti cubitus quiſque vtriuſque panni conſtitit? Pone quo pretio libet 6 cubitos panni rubri & 4 panni viridis fuiſſe emptos, dummodo de ambobus coloribus omnium cubitorum pretium 36 efficiat. Deinde vide ſi 9 cubiti panni rubri & 7 panni viridis eodem pretio emantur, quantũ vel deerit,vel ſupererit de 57:& errore notato,iterum ad eundem modũ ponens perge. Ita deprehendes per datas regulas panni rubri cubitum aureos 4 valere,cubitum autem viridis aureos 3.

GALLINAE 3, perdices 4, phaſiani 5 valent nummis 72. Eodẽ pretio gallinæ 3,perdices 5, & phaſiani 7 valent nũmis $94\frac{2}{3}$:quæro, quãti conſtitit vnaquæque auis? Regulas duces ſequens comperies gallinã emptam eſſe nummo $1\frac{1}{3}$,perdicem nummis $5\frac{1}{3}$,phaſianum nummis $9\frac{1}{3}$.

MINISTER cui tradita à domino nummorũ ſumma,mandatum erat vt quendam tritici modiorum numerũ emeret:in mercatũ profectus ſingulos tritici modios denis nũmis licetur:qua ratione de ſumma accepta nummos 40 ſibi ſuperfuturos deprehẽdit . at tritici venditor duodenis nũmis ſingulos modios indicat:quod pretiũ miniſter ſoluere recuſat,quòd ea ratione cõperiet ſibi defuturos nũmos 40:quæritur,quis erat modiorum numerus, quẽ emi dominus iuſſit? & quis nũmorũ numerus ad id traditus erat? Si modiorũ numerus eſſet cognitus,ſimul etiã

nummorum numerus ſciretur. Ideo vt exquiras quot modij tritici fuerunt, inueſtigandus eſt numerus qui in 10 ductus additis 40 tantum producat, quantũ in 12 multiplicatus, ſubductis 40. Is inuentus modiorum numerum monſtrabit: quem vt exquiras, pone fuiſſe modios 36: quorũ ſi ſinguli conſtarent nummis denis, fierẽt 360: his adde nummos 40 qui ſupereſſent, & ſurgent 400 pro ſumma miniſtro data. Poſtea videamus an venditoris indicatura cum his quadret. Is in ſingulos modios nummos 12 poſcit: qua ratione modij 36 conſtarent nummis 432: à quibus ſi 40 ſubducantur qui ad pretium illud explendum defuerunt, reſtabunt 392: ſic 8 deſunt, vt fiant 400 pro ſumma miniſtro data. Atque ita poſitio modiorum 36 defectum in 8 profert. Quare iterum ponamus fuiſſe modios 38: quorum ſi ſinguli denis conſtarent nummis, fierent 380, quibus addamus 40 quæ ſupereſſent, & fient 420 pro ſumma miniſtro data. Deinde videamus an venditoris indicatura de 12 nummis in ſingulos modios 38 quadret: nam ſic fierent nummi 456. à quibus ſi 40 pro his qui ad explendum pretium defuerunt, ſubducas, relinquentur 416. Ita deſunt 4, vt fiant 420 pro ſumma miniſtro data. Sic vtraque poſitio & de 36 & de 38 falſa eſt. Ex quibus ſi veritatem per regulas ſuprà datas inueſtigare libet, inuenies modiorum numerum, quem dominus emi voluit, eſſe 40, & nummorum numerum miniſtro datum 4400: in quibus numeris emptoris licitatio cum venditoris indicatura quadrabit.

ALIO modo per compendium quæſtio hæc, atque aliæ huiuſmodi ſolui poſſunt, vt numerũ qui ſuperfuiſſet, & numerum qui defuiſſet, in vnam ſummam addas. Deinde pretium licitantis miniſtri quod minus eſt, à pretio maiore venditoris indicantis ſubducito: & per pretiorum differentiam quæ reſtat, illam ſummam nummorum qui ſuperfuiſſent, & qui defuiſſent, diuide: ſic in numero ſectionis exibit modiorum numerus, qui cætera omnia aperiet: id quod in ſequenti quæſtione licebit etiam videre.

PERARII à patrefamilias ad putandam vineam in vnũ diem conducti mercedem operarũ petunt, ſinguli nũmos quinos: ille cauſatus ante veſperam ab opere eos ceſſaſſe, ſolum ternos offert, quibus ſi contenti eſſent, excuſſis loculis, deprehendit ſibi ſuperfuturos nummos 7. At ſi quini ſoluendi eſſent, defuturos 13. Libet inueſtigare quot operarios habuit, & quot nummos. Vt nodum hunc atque huiuſmodi per compendiũ ſoluas, addere oportet nũmos 7 qui ſuperfuiſſent, ad nummos 13 qui

defuiſſent:& ſurgent 20:qui numerus ſecandus eſt. Deinde ſubdū cere oportet mercedē minorem oblatam à maiore flagitata, videlicet 3 à 5,& reſtabunt 2:qui numerus diuiſor erit. Ita 20 per 2 ſecta in numero partitionis decē proferent. Tot operarij vineam putarunt. Nummorū enim numerus qui ſuperfuiſſet, ad numerum additus qui defuiſſet, diuidēdus eſt per mercedis petitæ & oblatæ differentiam, vt numerus ſectionis monſtret quot mercedē petūt. Poſtea facile ſcitu eſt quot nūmos paterfamilias habuit. Nam mercedis oblatæ numerus in numerum operariorū ductus id aperiet. Itaque 3 in 10 ducta procreabunt 30: quibus ſi 7 addas, prodibunt 37:is nummorū numerus patrifamiliâs in loculis erat. Præterea ſi operarius quiſque 5 in mercedē exegiſſet, operarij decē neceſſe eſt habuiſſent 50: à quibus ſi 13 qui defuerunt, ſubducas, ſupererūt 37.

POTES etiam rem explicare, ſi per falſas poſitiones numerum exquiras, qui in 3 multiplicatus, additis 7 tantum producat, quātum ſi in 5 ducatur, ſubductis 13. Is inuentus operariorum numerum indicabit, qui cætera omnia aperiet.

D VO AVREOS habētes, æqualem quiſque numerum, ad emendū pannū in mercatum vadunt. Alter 13 panni cubitos emit, cui ſuperfuerūt aurei 15. Alter eodē pretio pāni cubitos emit 20: cui defuerunt aurei 28, in quibus remanſit debitor. quæro, quanti conſtitit panni cubitus quiſque, & quantum eorū vterque in crumena habuit? Potes per coniecturas falſas rem explicare, ſi numerū per eas inueſtiges, qui in 13 ductus additis 15 tantum producat, quantū in 20 multiplicatus, ſubductis 28. Vel ſi mauis, per compēdium ſuprà datum rem aggredi licet: & vtroque modo deprehendes vnius cubiti pretium fuiſſe $6\frac{1}{7}$: vtrunque autem ſeorſum in crumena habuiſſe aureos $94\frac{6}{7}$.

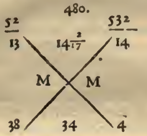
M ERCATOR panni linei telam empturus, ratione facta, cōperit, ſi ſingulos cubitos nummis 8 emat, ſibi ſuperfuturos nummos 50. At ſi 10 nummis cubiti ſinguli conſtent: defuturos nummos 80: quæro, quot cubitos tela capiebat? & quantum illi in loculis erat? Si per falſas poſitiones rem tentas, per eas inueſtigandus eſt numerus, qui in octo ductus, additis quinquaginta tantum producat, quantum in decem multiplicatus, ſubductis octoginta. Qua ratione inuenies telā cubitos ſexaginta quinque longam fuiſſe, nummóſque in loculis eum habuiſſe 570. Potes etiam per compendium datum continuo rem explicare.

DVO MERCATORES nauē lanis onerandam cōducunt. alter in eam ſaccos lanæ ſeptē, alter lanæ ſaccos vndecim impoſuit: eorū vterque ſeorſum pro ſe ſaccum vnū magiſtro nauis traditum vēdi, déque pretio naulum ſolui, & ſiquid ſupereſſet, reddi mandauit. Quod cum expleta nauigatione factū eſſet, magiſter nauis ei qui ſeptē ſaccos impoſuerat, aureos quinquaginta reddidit: ei verò qui vndecim ſaccos, aureos 20. quæritur, quantū cuiuſque ſacci naulū erat, & quāti magiſter nauis traditū ſaccum vendidit? Per poſitiones inueſtigandus eſt numerus, qui in 7 multiplicatus, additis quinquaginta tantum producat, quantum in 11 ductus, additis 20: qui cum inuentus fuerit, monſtrabit ſacci cuiuſque naulum fuiſſe aureos $7\frac{1}{2}$: ſaccum autem illum magiſtro nauis traditum, aureis $102\frac{1}{2}$ venditum fuiſſe.

QVI SACCARI libras ſex emerat, interrogatus de vnius libræ pretio, reſpōdit, Quanti libræ ſex pluris decem nūmis conſtiterunt, tanti libræ 10 pluris 20 nummis ſunt emptæ. Quæritur, quodnam pretium eſt vnius libræ? Ad hanc quæſtionem explicandam, per poſitiones inquirēdus eſt numerus, qui in ſex multiplicatus tantum ſupra decem producat, quantū in decem ductus ſupra 20 proferret. Is autem inuētus vnius libræ pretium indicabit $2\frac{1}{2}$. Vel ſi mauis, ad huius generis ænigmata ſoluēda, compendium ſequi licet ad hunc modum, Minimum numerum à medio ſubducere oportet, & quatuor reſtabunt: qui numerus diuiſor erit. Deinde medium numerum à maximo ſubtrahere eſt opus: & decem remanebunt. Ea per diuiſorem ſecta libram vnā nummis $2\frac{1}{2}$ eſſe venditā, in numero partitionis monſtrabunt. In tribus nanque his numeris 6, 10, 20, duæ ſunt differentiæ, ſiue duo exceſſus, quorum minor in hoc quæſito maiorem ſecare debet. Poſtquam autem habes vnius libræ pretium, reſponſi ænigma in lucem venit. Nam ſi libræ ſex in vnius libræ pretium ducas, procreantur nummi 15. Atque iterum ſi libras decem per vnius libræ pretium multiplices, ſurgent nummi 25. Ita numerus hic 5 æqualiter ſuperat & 10 nummos & 20.

ARCHITECTVS qui intra 30 dies ædes reficiendas ſuſcepit, cum earum domino vehementer vrgente, vt operi inſtaret, pepigit vt in ſingulos dies quibus operaretur, mercedem acciperet nūmos 18: at ſiquos dies ceſſaret, pro ſingulis redderet domino nummos 16. Is tot diebus ædibus reficiendis operam dedit, & tot diebus ceſſauit, vt facta ratione nihil ei reſtaret:

quæro quot diebus operatus eſt, & quot diebus ceſſauit? Pactũ benè conſyderans cõperies de 30 partes 2 exquirendas eſſe, quarũ altera ducta in 18 tantum producat, quantum altera in 16: id quod per poſitiones fortuitas facile inueſtigabis, ſi ſub 30 numerũ dierum quibus operatus eſt conijcias, cúmque in 18 ducas: deinde reliquam partem de 30 multiplices in 16 pro ceſſationis diebus. Poſtea vide vter numerus productus altero maior erit. Si numerus pro diebus ceſſationis productus alterũ ſuperat, poſitio de operis diebus defectum oſtentàt. At ſi numerus productus ex operum diebus maior eſt, poſitio in exceſſu peccat. Vtruncunque autem euenerit, annotandum erit: & iterum tentanda poſitio. Sequens itaque regulas datas comperies dies quibus operatus eſt, eſſe $14\frac{2}{17}$. reliquos verò vſque ad 30 quibus ceſſauit, eſſe $15\frac{15}{17}$.



INTERROGATVS quiſpiam quotam horam index horologij mõſtraret, reſpondit, Tertia & quarta pars horarũ quas indicat, ſunt quinta & ſexta pars earum quas indicare deberet. quotam horam index monſtrabat? & quotam monſtrare debebat? Priuſquam reſpondes, animaduertere oportet morem regionis in qua eſt horologiũ. Eſto, fuerit in Italia, in qua horarum ſupputatio per diẽ & noctem progreditur vſque ad 24. Vt ænigma hoc ſoluas, per poſitiones duæ partes de 24 ſunt inueſtigandæ, quarum $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ vnius, ſint $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$ alterius. Ita inuenies horas ab horologio monſtratas eſſe $9\frac{5}{19}$. eas verò quæ debuiſſent monſtrari, eſſe $14\frac{14}{19}$. Quippe de $9\frac{5}{19}$ tertia pars eſt $3\frac{5}{57}$, Quarta $2\frac{6}{19}$. quæ partes ambæ ſimul additæ faciũt $5\frac{437}{1083}$. At de $14\frac{14}{19}$ quinta pars eſt $2\frac{18}{19}$, ſexta $2\frac{26}{57}$. quæ etiam partes ambæ ſimul additæ creant $5\frac{437}{1083}$.

AVREI ducẽti inter duos aleatores æquis portionibus diuidi debuerunt, vt eorum vterque 100 deportaret. Effuſis è ſacco aureis, cũ rixa inter eos orta eſſet, iniectis vterque

manibus aceruum deripiunt:de quo alter plus,alter minus ſuſtulit.Demum ſedata rixa,conuentum eſt vt qui plus rapuiſſet,dimidium deponeret:qui minus,partem tertiam: quæ ſummæ depoſitæ,quum æquis partibus inter eos diuiſæ fuiſſent,vterque ſe comperit habere aureos 100, quẽadmodum ab initio partitio fieri debuit:quæro,quantum vterque rapuit? Per poſitiones inuenies alterum aureos octoginta quinque & $\frac{5}{7}$:alterum aureos centũ quatuordecim & $\frac{2}{7}$ rapuiſſe:quæ ſummæ compoſitæ faciunt 200.

E TRIBVS aleatoribus primus de pecunia ſecũdi dimidiũ lucratus eſt:ſecundus de tertij pecunia partẽ tertiam: tertius de primi pecunia partem quintam:luſúque finito,diſcedens eorum quiſque centum aureos deportauit: quæro,quantũ quilibet initio luſus attulit? Tentans per poſitiones cõperies primum attuliſſe aureos quinquaginta quinque & $\frac{5}{9}$. Secũdum aureos $111\frac{1}{9}$. Tertium $133\frac{3}{9}$.Nam primus de ſua pecunia quintã partem perdidit,videlicet $11\frac{1}{9}$: quo factum eſt vt ei reſtarent quadraginta quatuor & $\frac{4}{9}$:quibus dimidium de ſecundi pecunia acceſſit, nempe quinquaginta quinque & $\frac{5}{9}$:ita centum deportauit.Secundus de ſua pecunia dimidium perdidit,& de tertij pecunia partem tertiã lucratus eſt, videlicet quadraginta quatuor & $\frac{4}{9}$: quæ ſi addas ad alterum dimidiũ quod remanſit,ſurgent etiam centũ. Tertius de tertia parte pecuniæ ſuæ iacturam fecit.ſic ei remanſerunt octogintaocto & $\frac{8}{9}$: quibus ſi quintam partem de primi pecunia lucrifactam,videlicet $11\frac{1}{9}$,adiungas,fient etiam illi centum.

D VO VIATORES Cornelius & Antonius in itinere crumenas duas,alterã rubram,alteram nigrã,ſubinde repererunt,in quarũ altera aurei 10 plures quàm in altera fuerũt, atque in ambabus aurei centũ.Cornelius ſecum ſupputãs,ad Antonium inquit, Si tu mihi crumenam rubram dabis, & aureos decem de tuis , tum ego tuæ pecuniæ quadruplum ſum habiturus. Reſpondit Antonius, At ſi tu mihi dabis crumenã nigram, & de tuis aureos viginti, tum ego tuæ pecuniæ quintuplũ ſum habiturus:quæritur,quot aurei in rubra crumena,quot in nigra fuerunt, & quot aureos Cornelius de ſuis,quótque Antonius habuit?Principio de centũ duas partes facere oportet, quarũ altera ſuperet alteram partibus decẽ:hæ ſunt quinquaginta quinque,& 45. Deinde viatorũ vtriuſque aureos per poſitiones exquiſiturus, finge eorum vtrũque numerũ quemlibet habere, aſſignans etiam eis vt libet crumenas: annotáque errorẽ. Cæterum prius quàm ad ſecun-

dam poſitionem pergis, crumenarum aſſignationem (ſeruata ipſa eadem poſitione) commuta, obſeruáque vtra earum aſſignatio minorem errorē parit, vt illam reiecta altera, etiam in ſecūda poſitione teneas. ita ſcies vter crumenā rubram vter nigrā habuit. Poſtea ad ſecundam poſitionē accingere, & regulas datas ſequens deprehendes Cornelium de ſuis habuiſſe aureos $40\frac{5}{19}$. Antonium $36\frac{6}{19}$: atque in crumena rubra fuiſſe aureos 55, in nigra 45.

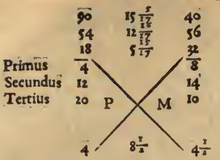
M ILES qui in ſtatione erat, à viatore interrogatus quot in præſidio eſſent, reſpondit, Si totidem alij accederent, dimidium de totidem, & quarta pars de totidem, omnes vnà tecum faceremus 100. Iuuat ſcire quot milites eſſent in præſidio. Tenta per poſitiones, & inuenies fuiſſe triginta ſex.

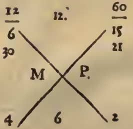
M ERCATOR ad trinas nundinas ſubinde profectus, primis omnem ſuam pecuniam per lucrū duplicauit: & inſumpſit libras auri duodecim. Secundis id quod ex primis ſuperfuit, per lucrū duplicauit, & iterū inſumpſit libras auri duodecim. Tertijs id quod ex ſecundis remanſit, per lucrum duplicauit, & rurſus inſumpſit auri libras 12. quo factum eſt, vt nihil omnino ei reſtaret. Quæritur, quantū pecuniæ ad primas nundinas ab initio ſecum extulit? Tenta per poſitiones, & cōperies eum extuliſſe auri libras $10\frac{1}{2}$. Licet etiam ſine vlla poſitione quæſitū hoc explicare, ſi à poſtremis nundinis incipiens, colligénſque per ſingulas lucra quæque, & ſubducens impenſas, ordine retrogrado ad primas nundinas pergas. quemadmodum de ſacerdote tribus mēdicis pecuniam erogante libro tertio monſtrauimus.

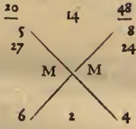
T RES pecuniam habent, aureorū quiſque ſummam, quorum primus alijs duobus inquit, Si mihi dimidium pecuniæ veſtræ cōtuleritis, habebo vnà cum mea pecunia aureos 20. Secūdus verò cæteris dicit, Si mihi partē tertiam pecuniæ veſtræ donaueritis, habebo vnà cum mea aureos 20. Tertius quoque reliquis affirmat, ſi mihi partē quartam pecuniæ veſtræ dederitis, habebo vnà cū mea aureos 20. Quæro, quot aureos habet eorum vnuſquiſque? Pone vt libet, puta primum habere aureos 4: alij (neceſſe eſt) habeant in ſumma 32: quorū $\frac{1}{2}$ primo data faciet illi aureos 20. Iam verò, vt ſeorſum exquiras ſecūdi & tertij partes, poſitiones alias facere oportet, ad hunc modum, Adde ſimul omnium partes prima poſitione coniectas, & fient 36. Deinde vt partem ſecundi exquiras, inueſtigare oportet de 36 partes duas, quarū alteri pars tertia alterius iuncta faciat 20: id quod obiter per alias

poſitiones faciendum eſt,& earum alteram inuenies 12. tantū habebit ſecūdus. Sic primus & tertius habebunt 24, è quibus 4 ſunt primi,ſicut eſt poſitum,20 erunt tertij. Sic ſecundum thema partes primi & ſecundi congruunt:cæterum tertij pars per hanc poſitionem erit 24:quippe ſi primus & ſecundus $\frac{1}{4}$ ei cōferant,ea erit 4. at ipſe habet 20.ſic fiunt 24,& 4 excedentes in prima hac poſitione redundant. Iterum igitur pone vt libet, puta primum habere 8, quo fiet vt ſecundus & tertius habeant 24, quorum $\frac{1}{2}$ faciet ei qui primus eſt 20. Et vt partem ſecundi inuenias, adde ea omnia ſimul, & fient 32. poſtea per alias poſitiones obiter inueſtigare oportet de 32 partes duas, quarum alteri pars tertia alterius iuncta faciat 20. Et inuenies alteram eſſe 14. Tantum habebit ſecundus in ſecunda hac poſitione, in qua primus habet 8: primus verò & tertius habebunt 18: quorum $\frac{1}{3}$ ſecūdo collata faciet ei 20. Si primus & ſecundus habent 22, quorum $\frac{1}{4}$ eſt $5\frac{1}{2}$: quæ addita ad 10 faciūt $15\frac{1}{2}$: qua ratione deſunt $4\frac{1}{2}$, vt fiant 20: atque ita ſecunda poſitio defectum parit. Quocirca vt inter has duas falſas poſitiones, quarum prior exceſſum, ſecunda defectum profert, veritas inueniatur, adde ambos errores, videlicet 4 & $4\frac{1}{2}$:& ſurgent $8\frac{1}{2}$:qui numerus diuiſor erit. Deinde primus error 4 ducatur in ſecundam poſitionem 8,& producentur 32. Item ſecūdus error $4\frac{1}{2}$ ducatur in priorem poſitionem 4,& fient 18:ea addita ad 32, creant 50:quæ ſumma ſi ſecetur per $8\frac{1}{2}$, in numero partitionis prodibunt $5\frac{15}{17}$. tantum habuit primus. Iterum pro ſecundi parte exquirēda, ducatur prior error 4 in ſecundam poſitionem 14,& creſcent 56. Itidem ſecundus error $4\frac{1}{2}$ in priorem poſitionem 12,& fient 54: quæ addita ad 56, creant 110: ea ſi ſecētur per $8\frac{1}{2}$, in numero partitionis exeunt $12\frac{16}{17}$: tantum habuit ſecundus. Rurſus pro tertij parte inueſtiganda, ducatur prior error 4 in ſecundam poſitionem 10,& fient 40. Similiter ſecundus error $4\frac{1}{2}$ in priorem poſitionem 20, & fient 90: quæ addita ad 40, creant 130. Ea ſi per $8\frac{1}{2}$ diuidantur, in numero ſectionis prodibunt $15\frac{5}{17}$:tantum habuit tertius. Experire ſecundum thema,& ita eſſe comperies.

Huiuſmodi poſitiones duplices vocantur, quòd ad confirmandas præcipuas poſitiones, aliæ obiter fiant, quas ſpectandas oculis hic ſubiecimus, vt lector melius intelligat,







IN SVMMA, per falſarum poſitionum regulas vniuerſæ quæſtiones quæ in negotiationibus interuenire ſolent, facile explicantur. Quæ verò radicum ſupputationem, aut quadraturas requirunt, altiorem poſcunt artem, quam Arabes Algebram vocant. Ea mõſtrat radicum quadratarum cubicarúmque additionẽ, ſubductionem, multiplicationẽ, & diuiſionem: per quã vniuerſa quantunuis ardua, quæ ad numeros attinent, poſſunt expediri. Cæterum nos tãtum ea quæ ad vitam communem tranſigendam neceſſaria ſunt, ſtudioſis explicanda ſuſcepimus.

APPENDIX EX BVDAEI LIBRO DE ASSE EXCERPTA, in qua priſca Latinorum & Græcorum ſupputatio, ad æſtimationem pecuniæ tum Gallicæ, tum Anglicæ reuocatur.

PERAEPRETIVM eſſe putauimus noſtrates ſtudioſos admonere, quemadmodum priſca vel Romana vel Græca numiſmata, eorúmque ſummæ quælibet pecunia noſtrate poſſint æſtimari: vt cum veteres authores in manus legendos ſumunt, ſi qua pecuniæ ſumma interuenit, eius æſtimationem protinus agnoſcāt. Id quod Budæus vir cum primis ætatis noſtræ eruditus in eo libro quē de Aſſe & partibus eius mira induſtria cōpoſuit, de pecunia Gallica ſuam gentē admonuit. Quo nomine nō tātum Gallorum, ſed omnium nationum poſteritas ei plurimum debet, quòd priſcorum theſauros refractis barbariei vinculis, quibus concluſi erant, aperuerit. Itaque quibus pecunia Gallica nota eſt, ſatis ab illo ſunt edocti quanti vetera quæque numiſmata, atque eorum ſummæ quælibet occurrentes æſtimentur. Noſtrates verò, quibus ea ignota eſt, per quædam quæ ex illius libro excerpta hic ſubnotauimus, facile idem cognoſcent.

APVD Romanos, dum floreret imperium, auri libra nummos aureos quadragenos octonos capiebat, quorum ſinguli valebant denarios vicenos quinos. Ex his aurei quatuor vnciam pendebāt: poſtea partim luxu, partim bellis ciuilibus, extenuatis opibus, imminuti ſunt aurei, vt tertia pars ponderi decederet, & ſeptuaginta duo ex auri libra fierent. Hi ſolidi vocari cœpti ſunt, quaſi integri, quibus nihil deeſſet. ſolidum enim antiqui integrum vocabant. Atque ſextulæ etiam nuncupati ſunt, quòd eorum ſex vnciam complerent. Nunc, quod ſciam, nuſquam gentium illorum aureorum inſtar aliquod manet, niſi apud noſtrates Anglos, quorum aurei quatuor, quos Nobiles Roſatos vulgo vocant, pendent vnciam: qui veteres aureos Romanos & pondere æquant, & auri probitate parum aut nihil cedunt. Item ſex noſtrates aurei, quos Nobiles Angelos appellamus complent vnciam: & veteres ſolidos, qui ſextulæ nuncupati fuerunt, & pōdere & indicatura æquiparant. Porrò Romani nummariam argenti libram centum denarios argenteos, quorum ſinguli drachmæ pondus æquabant, complecti voluerunt. Denarius apud eos dictus, quòd denos æreos aſſes valeret, vt inquit Varro. Huius dimidium Quinarius argenteus valebat æreos aſſes quinque. at nummus Seſtertius argenteus

q.v.

duos aſſes & ſemiſſem,dictus quaſi ſemis tertius. Horum quatuor denarium valebant.quo fit vt quadringenti ſeſtertij denarios centum,hoc eſt libram nummariam valerent.Qua ratione Seſtertium neutro genere,quod duas argenti libras & ſemiſſem complectebatur,mille ſeſtertios genere maſculino capiebat. Seſtertius autem ipſe nummus æris duas libras & ſelibram complectebatur, hoc eſt duos aſſes & ſemiſſem. Nam As,æris libram duodecim vncias cōplectentem valebat. Sextans numiſma paruum valebat duos aſſes. Quadrans nummus æreus quartam aſſis partem,vt Triens tertiā. Semis autem duos valebat quadrantes. Huic nummariæ rationi, quod ad denarios,quinarios,& ſeſtertios attinet,vetus pecunia noſtra,quam Sterlingam vocamus,per omnia ſimilis eſt. Quod enim veterem Groſſum Sterlingum noſtrate lingua dicimus, id pondere & indicatura denarium Romanum æquat. Quod veterem Semigroſſum vocamus,Quinarium. Quod noſtratium vulgus veterem denarium Sterlingum appellat,ſeſtertium nummum æquipa rat. Cæterum nos libram Sterlingam vocamus, quod apud Romanos libræ dimidium,ſelibra erat. At quod Romani neutro genere Seſtertium vocabant, duas argēti libras & ſemiſſem complectens,nos quinque libras vocamus,quòd libræ noſtræ ſint ſelibræ Romanæ.

ILLVD obſeruandum videtur, veteres Seſtertium, quod duas libras & ſemiſſem caperet, per duo L & vnum S notare ſolere, ad hunc modum LLS: ſiue de ſeſtertijs nummis, ſiue de alijs ſeſtertijs intelligas. Id quod adhuc extantes libri veteres teſtantur.

Seſtertium neutri generis. Viginti quinque aurei coronati. Quinque libræ ſterlingæ.

Decem ſeſtertia. Ducenti quinquaginta coronati. Quinquaginta libræ ſterlingæ.

Viginti ſeſtertia. Quingenti coronati. Centum libræ ſterlingæ.

Triginta ſeſtertia. Septingenti & quinquaginta coronati. Cētum & quinquaginta libræ ſterlingæ.

Quadraginta ſeſtertia. Mille coronati. Ducentæ libræ ſterlingæ.

Quinquaginta ſeſtertia. Mille ducenti quinquaginta coronati. Ducentæ quinquaginta libræ ſterlingæ.

Centum ſeſtertia. Duo millia & quingenti coronati. Quingentæ libræ ſterlingæ.

Ducēta ſeſtertia. Quinq; millia coronatorū. Mille libræ ſterlingæ.

Quadringenta ſeſtertia. Decem millia coronatorū. Duo millia librarum ſterlingarum.

Quingenta ſeſtertia. Duodecim millia & quingēti coronati. Duo millia & quingentæ libræ ſterlingæ.

Sexcenta ſeſtertia. Quindecim millia coronatorum. Tria millia librarum ſterlingarum.

Octingenta ſeſtertia. Viginti millia coronatorum. Quatuor millia librarum ſterlingarum.

Mille ſeſtertia. Viginti quinque millia coronatorū. Quinque millia librarum ſterlingarum.

¶ Decies ſeſtertiûm Romani quodā ſermonis compendio dicebāt pro decies centena millia ſeſtertiorum. quo ſignificabant idē quod mille ſeſtertia. & ferè ſupra mille per aduerbia loquebantur: infra mille, nunquam.

Duodecies ſeſtertiûm. Triginta millia coronatorum. Sex millia librarum ſterlingarum.

Quindecies ſeſtertiûm. Triginta ſeptem millia & quingenti coronati. Septem millia & quingentæ libræ ſterlingæ.

Vicies ſeſtertiûm. Quinquaginta millia coronatorū. Decem millia librarum ſterlingarum.

Tricies ſeſtertiûm, Septuaginta quinque millia coronatorū. Quindecim millia librarum ſterlingarum.

Quadragies ſeſtertiûm. Centum millia coronatorum. Viginti millia librarum ſterlingarum.

Sexagies ſeſtertiûm. Centum quinquaginta millia coronatorum. Triginta millia librarum ſterlingarum.

Octogies ſeſtertiûm. Ducenta millia coronatorum. Quadraginta millia librarum ſterlingarum.

Centies ſeſtertiûm. Ducenta quinquaginta millia coronatorum. Quinquaginta millia librarum ſterlingarum.

Ducenties ſeſtertiûm. Quingenta millia coronatorum. Centū millia librarum ſterlingarum.

Quadringenties ſeſtertiûm. Decies centena millia coronatorum. Ducenta millia librarum ſterlingarum.

Quingenties ſeſtertiûm. Duodecies centena quinquaginta millia coronatorū. Ducēta quinquaginta millia librarū ſterlingarum.

Octingenties ſeſtertiûm. Vicies centena millia coronatorum. Quadringenta millia librarum ſterlingarum.

Millies ſeſtertiûm. Vicies quinquies, centena millia coronatorum. Quingenta millia librarum ſterlingarum.

Bis millies ſeſtertiûm. Quinquagies centena millia coronatorum. Decies centena millia librarum ſterlingarum, ſiue millies millenæ libræ.

Ter millies ſeſtertiûm. Septuagies quinquies centena millia coronatorum. Quindecies centena millia librarum ſterlingarum.

Quater millies ſeſtertiûm. Centies centena millia coronatorum. Vicies centena millia, hoc eſt, bis millena millia librarum ſterlingarum.

Sexies millies ſeſtertiûm. Centies quinquagies centena millia coronatorum. Tricies centena millia, hoc eſt, ter millena millia librarum ſterlingarum.

Octies millies ſeſtertiûm Ducēties cētena millia coro. Quadragies cētena millia, hoc eſt, quater millena millia librarū ſterlingarū.

Decies millies ſeſtertiûm. Ducenties quinquagies centena millia coronatorū. Quinquagies centena millia, hoc eſt, quinquies millena millia librarum ſterlingarum.

Vicies millies ſeſtertium. Quingenties cētena millia coronatorum Centies centena millia, hoc eſt, decies millena millia librarū ſter lingarum.

Quadragies millies ſeſtertium. Millies centena millia coronatorū. Ducenties centena millia, hoc eſt, vicies millena millia librarum ſterlingarum.

GRAECORVM SVPPVTATIO.

MINA APVD Græcos idem eſt quod libra & pōdo apud Romanos. hæc centum drachmas continebat, hoc eſt centū denarios romanos, ſiue quadringētos ſeſtertios. Drachma enim & denarius paris erant æſtimationis. Mina decem coronatos valebat, ſiue duas libras ſterlingas. Drachma in ſex obolos diuidebatur, atque in trientes, quadrantéſque. Seſquiobolus Athenis, erat Romæ ſeſtertius.

TALENTVM multiplex fuit, ſed Atticum maxime ab hiſtoricis celebratum, ſexaginta libras ſiue minas valuit, hoc eſt, ſexcētos coronatos, ſiue centum viginti libras ſterlingas.

Decem talenta. Sex millia coronatorum. Mille & ducentæ libræ ſterlingæ.

Viginti talenta. Duodecim millia coronatorũ. Duo millia & quadringentæ libræ ſterlingæ.

Quadraginta talenta. Viginti quatuor millia coronatorum. Quatuor millia octingentæ libræ ſterlingæ.

Quinquaginta talenta. Triginta millia coronatorum. Sex millia librarum ſterlingarum.

Centum talenta. Sexaginta millia coronatorum. Duodecim millia librarum ſterlingarum.

Ducenta talenta. Centum viginti millia coronatorũ. Viginti quatuor millia librarum ſterlingarum.

Trecenta talenta. Centum octoginta millia coronatorum. Triginta ſex millia librarum ſterlingarum.

Quadringenta talenta. Ducenta quadraginta millia coronatorũ. Quadraginta octo millia librarum ſterlingarum.

Quingenta talenta. Trecenta millia coronatorum. Sexaginta millia librarum ſterlingarum.

Sexcenta talenta. Trecenta ſexaginta millia coronatorum. Septuaginta duo millia librarum ſterlingarum.

Septingenta talenta. Quadringenta viginti millia coronatorum. Octoginta quatuor millia librarum ſterlingarum.

Octingenta talenta. Quadringenta octoginta millia coronatorũ. Nonaginta ſex millia librarum ſterlingarum.

Noningenta talenta. Quingenta quadraginta millia coronatorũ. Centum & octo millia librarum ſterlingarum.

Mille talenta. Sexcenta millia coronatorum. Centum viginti millia librarum ſterlingarum.

Duo millia talentûm. Duodecies centena millia coronatorũ. Ducenta quadraginta millia librarum ſterlingarum.

Tria millia talentûm. Duodecies centena millia coronatorũ. Trecenta ſexaginta millia librarum ſterlingarum.

Quatuor millia talentûm. Vicies & quater centena millia coronatorum. Quadringenta octoginta millia librarum ſterlingarum.

Sex millia talentûm. Tricies ſexies cẽtena millia coronatorũ. Septingenta viginti millia librarum ſterlingarum.

Octo millia talentûm. Quadragies octies centena millia coronatorum. Noningenta ſexaginta millia librarum ſterlingarum.

Decem millia talentûm. Sexagies centena millia coronatorũ. Mille & ducenta millia librarum ſterlingarum.

Quindecim millia talentûm. Nonagies cetena millia coronatorũ. Mille & ſexcenta millia librarum ſterlingarum.

Viginti millia talentûm. Centies vicies centena millia coronatorũ. Bis millena & quadringenta millia librarum ſterlingarum.

MENSVRAE EX BVDAEI LIBRO DE ASSE.

C YATHUS, duodecima pars ſextarij, pẽdet vncias duas, drachmas ſexdecim.

Acetabulum, quod dicitur Oxybaphus, quarta pars Cotylæ, continet Cyathum & dimidium. pendet vncias tres.

Cotyla quæ Hemina dicitur, dimidium ſextarij continet, Cyathos ſex. pendet libram vnam.

Sextarius, ſexta pars Congij, continet Cotylas duas, Cyathos duodecim. pendet libras duas.

Congius continet Sextarios ſex, Heminas duodecim, Cyathos ſeptuaginta duos.

Modius, tertia pars Amphorę, capit Sextarios ſexdecim. Heminas quadraginta octo.

Amphora quæ Quadrãtal dicitur, capit Vrnas duas: Modios tres: Congios octo: Sextarios quadraginta octo: Heminas nonaginta ſex.

Cadus, qui etiam Metreta dicitur, capit Congios decem: Sextarios ſexaginta: Amphoram & quadrantem.

Culeus capit Amphoras viginti, Vrnas quadraginta, Modios ſexaginta.

Medimnus capit Modios ſex, Amphoras duas.

H ACTENVS ex Budæi libro de Aſſe excerpſimus. Nũc ætate noſtra apud ſingulas penè nationes aurei pro regũ aut principum arbitrio varium habent pretium. ſic libræ, ſic ſolidi, vt nũc ſunt vocabula, magnam pro regionibus diuerſitatem habent. Cæterum illud mirum videtur, quomodo in tanta librarũ & ſolidorũ æſtimationis differẽtia, pro ſuo cuiuſque regionis more, multæ tamen nationes conſentiũt, vt vulgari lingua ſolidũ vocent, quòd denariolos duodecim vulgares cõplectitur. librã, quod ſolidos viginti. Quocirca mercatorijs ſupputationibus in hac ætate noſtra plurimum conducet, ſiquis in promptu teneat quot ſolidos quælibet denariolorum ſumma procreet vſque ad mille. Id quod ante oculos per gradus quoſdam, numerorum notis ſignandum duximus.

QVOMODO EX DENARIIS FIANT SOLIDI.

12.d.	1.ſ.	100.d.	8.ſ.4.d.
18.d.	1.ſ.6.d.	200.d.	16.ſ.8.d.
24.d.	2.ſ.	300.d.	25.ſ.
30.d.	2.ſ.6.d.	400.d.	33.ſ.4.d.
36.d.	3.ſ.	500.d.	41.ſ.8.d.
42.d.	3.ſ.6.d.	600.d.	50.ſ.
48.d.	4.ſ.	700.d.	58.ſ.4.d.
54.d.	4.ſ.6.d.	800.d.	66.ſ.8.d.
60.d.	5.ſ.	900.d.	75.ſ.
66.d.	5.ſ.6.d.	1000.d.	83.ſ. 4.d.
72.d.	6.ſ.	1100.d.	91.ſ.8.d.
78.d.	6.ſ.6.d.	2200.d.	100.ſ.
84.d.	7.ſ.		
90.d.	7.ſ.6.d		
96.d.	8.ſ.		

FINIS APPENDICIS.

GVLIELMI BVDAEI PARISIENSIS, SECRETARII REGII, BREVIARIVM DE ASSE.

AS, QVI ET ASSIS dicitur, in duodecim vncias diſtribuitur. As quaternos denariolos noſtros valuit, & pauxillo plus, Sic fit vt duo aſſes & ſemis, ſeſtertium faciant, id eſt, caroleum noſtrum & ſemiſſem denarioli.

Duo aſſes, ſextans dicebantur, quod numiſma paruum fuit, cuius meminit Plinius & Liuius.

Quadrans etiam nummulus, & valebat aſſis quartam partem, & Triens tertiam. Semis autem duos quadranteis valebat.

Apud Græcos drachma in ſex obolos diuiſa eſt, & in trienteis, quadranteiſque. Seſquiobolus Athenis erat Romæ ſeſtertius.

Seſtertius, & nummus idem erant apud Romanos.

Seſtertius æſtimatione noſtra decem turonicis denariolis, & ſemiſſe denarioli valuit.

Denarius quaternos ſeſtertios nummos valebat, hoc eſt, quaternos caroleos noſtros, & binos denariolos turonicos: ex eo dictus denarius, quòd pro decem aſſibus locaretur æreis, & cederet in ſolutum.

Seſtertius ex eo dictus eſt, quòd duos aſſes, & ſemiſſem valeret. Qua ratione quaterni ſeſtertij denarium Romanum valebant. Et ſeſtertius dictus, quia tertius ſemis eſt, duo ſunt ſolidi aſſes, & ſemis. hic etiam nummus dicebatur, & argenteus erat.

Libra Romana quæ & mina, & pondo dicitur, centenos denarios, ſeu quod idem eſt, centenas drachmas habebat. Cũ igitur denarius quaternos ſeſtertios æquaret pōdere & æſtimatione, liquet in libra Romana quadringentos fuiſſe ſeſtertios, & in duabus libris & ſelibra, mille ſeſtertios. qua ratione fit vt ſeſtertia ſingula numero plurali millenos ſeſtertios valeant, hoc eſt, duas libras & ſemiſſem. Vt enim ſeſtertius nummus dicitur ex eo quòd duos aſſes & ſemiſſem valebat, hoc eſt, duas libras æris grauis & ſelibrã: Ita ſeſtertia numero plurali & genere neutro ideo dicuntur, quòd ſingula duas libras & ſelibram argenti valerent, hoc eſt, ducentos & quinquaginta denarios: ſiue mille ſeſtertios, quod idem eſt. Sic fit vt decem ſeſtertia, & decem millia ſeſtertiûm nummorum pro eodem ab antiquis dicerentur.

Mille ſeſtertij, æſtimatione noſtra, viginti quinque coronatorũ valent. Dicitur autem mille ſeſtertij, & mille nummi: vel mille ſe-

ſtertiûm,& mille nummûm, vel copulate,mille ſeſtertiûm nūmū.

Cum autem mille ſeſtertij,id eſt ducenti quinquaginta denarij, duas libras argenti & ſemiſſem valerent,ſequitur vt libra Romana quæ & mina dicitur & pondo, decem aureos coronatos valuerit. Coronatos autem intelligi volo, vt ſinguli trigintaquinque ſolidos valeant,quod eſt legitimum pretium.

Igitur decē millia nummûm,vel decem millia ſeſtertiûm, quod idem eſt,ducētos & quinquaginta aureos coronatos valebāt.Hæc etiam decem ſeſtertia dicuntur,cum ſingula ſeſtertia, ſingula millia ſignificant.

Decies ſeſtertiûm,idē eſt quod decies centena millia ſeſtertiûm: quæ ſumma centies maior eſt decē ſeſtertijs. Idē eſt enim decies ſeſtertiûm,quod mille ſeſtertia. Cū enim ſingula ſeſtertia millenos nūmos ſeſtertios valeant,ſi mille ſeſtertia millies multiplices, fient decies centena millia, quem lingua vernacula millionem vocant.

Decies igitur ſeſtertiûm, centies ducentos & quinquaginta aureos valet,hoc eſt, vigintiquinque millia.Sic fiet vt millio Romanus vigintiquinque millia coronatorum valeat.

Hoc igitur tenere oportet, quòd quemadmodum cū à nummis ſeſtertijs ad ſeſtertia genere neutro fit tranſitus, numerus millies multiplicatur: ita cum ad eam loquutionem ventum eſt quæ per aduerbia numeralia enuntiatur,ſeſtertia ſingula conduplicata creſcunt:vt verbi gratia,Si centum ſeſtertia dicam,centum millia ſeſtertiûm intelligere debeas.Quod ſi centies ſeſtertiûm dicam,non iam centum ſeſtertia,ſed centies centena ſeſtertia,ſeu centies centena millia ſeſtertiûm, intelligendum ſit.

Vt autem facilis,& obuia ſit vnicuiſque earum ſummarum intelligentia quæ apud authores identidē legūtur,hoc meminiſſe oportet quod ſequitur, vt quæuis ſumma etiam in digitos deduci poſſit ſine calculis,aut abaco.

Decem ſeſtertia	ducenti quinquaginta aurei.
Viginti ſeſtertia	quingenti aurei.
Triginta ſeſtertia	ſeptingenti & quinquaginta.
Quadraginta ſeſtertia	mille aurei.
Quinquaginta ſeſtertia	mille ducenti & quinquaginta.
Sexaginta ſeſtertia	mille & quingenti.
Centum ſerſtertia	duo millia & quingenti.
Ducenta ſeſtertia	quinque millia.
Quadringenta ſeſtertia	decem millia coronatorum. Cenſus

equeſtris ſub Iulio Cæſare.

Quingenta ſeſtertia	duodecim millia & quingenti.
Sexcenta ſeſtertia	quindecim millia.
Octingenta ſeſtertia	Viginti millia. Cēſus ſenatorius ante Auguſtum.
Mille ſeſtertia	viginti quinque millia.
Mille ac ducenta ſeſtertia	triginta millia. Cenſus ſenatorius ſub Auguſto.

Notandum quòd ſupra mille ſeſtertia Romani fere ſemper per aduerbia loquebantur: infra mille, nunquam per aduerbia loquuti ſunt, hoc modo,

Decies ſeſtertiûm id eſt mille ſeſtertia,	vigintiquinque millia.
Duodecies ſeſtertiûm	triginta millia aureorum. Cenſus ſenatorius ſub Auguſto.
Quindecies ſeſtertiûm	triginta ſeptem millia & quingenti.
Vicies ſeſtertiûm	quinquaginta millia.
Tricies ſeſtertiûm	ſeptuaginta quinque millia aureorum.
Quadragies ſeſtertiûm	centum millia aureorum.
Quinquagies ſeſtertiûm	cētum vigintiquinque millia aureorū.
Sexagies ſeſtertiûm	cētum quinquaginta millia aureorum
Centies ſeſtertiûm	ducēta quinquaginta millia aureorum Tanti æſtimatus eſt vnio Cleopatræ.
Quadringenties ſeſtertiûm	decies centena millia, id eſt millio. Millies mille, id eſt millio. Tanti æſtimatus eſt à Plinio ornatus Lolliæ.
Millies ſeſtertiûm	vicies quinquies centena millia, id eſt duo milliones, & quingenta millia.
Bis millies ſeſtertiûm	quinquagies centena millia. Cēſus Lētuli auguris ſub Auguſto.
Quater millies ſeſtertiûm	decem milliones dicuntur, hoc eſt centies centena millia.
Decies millies ſeſtertiûm	viginti quinque milliones.
Quadragies millies ſeſtertiûm	centum milliones.

Vicies ſepties millies ſeſtertiûm coegiſſe Tiberius dicitur, id eſt ſexaginta ſex milliones & quinquaginta millia aureorum coronatorum, vt noſtro ſermone loquar.

Libra Romana in duodecim vncias & ſemiunciā diuiditur, & vncia in octonas drachmas. Sic fit vt centenæ drachmæ libram & minam, ſeu pondo faciant.

Drachma in terna ſcrupula diuiditur. Sic fit vt ſint vicena quaterna ſcrupula in vncia. Pariſiẽſes drachmam groſſum appellãt, & ſcrupulum appellant denarium, & binæ drachmæ ſterlini quinque dicuntur, id eſt quadrans vnciæ.

Hæc de pondere dicta ſufficiant.

GRAECORVM SVPPVTATIO.

Mina apud Græcos idẽ eſt quod libra & põdo apud Romanos, hæc centum drachmas continebat, hoc eſt centum denarios Romanos, ſeu quadringentos ſeſtertios.

Mina igitur decem aureos coronatos valuit. Et drachma tres ſolidos turonicos & ſemiſſem, quãti ſcilicet denarius Romanus æſtimatus eſt à nobis, hoc eſt quaterni nummi.

Talentũ multiplex fuit, vt in libro noſtro latiſſime enarratũ eſt, ſed talentũ Atticũ quod plurimũ celebratur ab hiſtoricis, ſexaginta libras valuit, ſeu minas, hoc eſt ſex millia denariorũ vel drachmarum, quæ ſexagies denos coronatos valent, hoc eſt ſexcentos.

Talentum	ſexcenti aurei.
Decem talenta	ſex millia aureorum.
Quindecim talenta	nouem millia aureorum.
Viginti talenta	duodecim millia aureorum.
Quinquaginta talenta	triginta millia aureorum.
Duodecies ſeſtertiûm.	
Centum talenta	ſexaginta millia.
Vicies quater ſeſtertiûm.	
Ducenta talenta	centum millia & viginti.
Quadringenta talenta	ducenta & quadringenta millia.
Ducenties quadragies ſeſtertiûm.	
Mille talenta	ſexcenta millia.
Duo millia talentûm	mille & ducenta millia.
Bis millies & quadringenties ſeſtertiûm.	
Decem millia talentûm	ſexagies centena millia. Tãti funeraſſe Alexander Epheſtionem dicitur.

ERRATA SIC CORRIGITO.

Pagina	Linea	
100	25	deſignent
130	4	perficient 318

EXCVDEBAT ROBERTVS STEPHANVS PARISIIS,
ANN. M. D. XXXVIII.
XVI. CAL. NOVEMB.

BERNARDI SALIGNACI BVR-DEGALENSIS ARITHMETICÆ LIBRI DVO,

ET

ALGEBRÆ TOTIDEM,

cum demonſtrationibus.



FRANCOFURTI
Apud Andream Wechelum,
M D L X X X.

BERNARDI SALI-GNACI BURDEGALENSIS IN ARITHMETICAM *præfatio*

AD GENEROSISSIMOS COMITES & Dominos Waldeccenſes Mecœnates optimos.

SUPERIORE *anno Generoſiſſimi Comites, Clementiſſimi Domini & Mecænates optimi, ad Generoſiſſimum Dom. Yvonem Marchionem Alegreum Regium obſidem, Heidelbergæ jam captivum (ſed tamẽ cujus captivitas ei æternæ laudi & gloriæ futura ſit: quis enim omni laude eum non proſequatur qui optimi parentis captivitatem in ſe transferre, quám parentem captivum ſuſtinere maluit?) ad Generoſiſſimum inquam Marchionem Alegreum ſuperiore anno Gallicam Arithmeticam cum ſuis demonſtrationibus xeniorum loco miſi. Laborem hunc qualem qualem meum, Reipub. tamen literariæ non inutilem arbitratus, ſuſcepto nuper á me Conrectoratus munere in ea ſchola quam Corbachiæ optimis & fœliciſſimis auſpiciis fundaſtis, cúm omnia mea ſtudia & cogitationes ad ſcholæ noſtræ promotionem dirigerem; putavi me rem & Corbachianæ juventuti utiliſſimam & veſtris Generoſitatibus gratiſſimam eſſe facturũ, ſi Gallicas has meas commentationes Latinas facerem, easq́ in veſtrarum Generoſitatum nomine divulgarem. Scholam enim noſtram á vobis cum ſumma & veſtrum omnium laude & ſubditorum veſtrorum utilitate in octo claſſes diſtributam non modó linguarum Latinæ, Græcæ & Hebraicæ, ſed & liberalium omnis generis artium doctiſſimis profeſſoribus ornari voluiſtis, ut in ea Mathematicis quoque diſciplinis locus aliquis relinquatur. Equidem præſentem Reipub. ſtatum rectè tueri & conſervare poſſe magnum & præclarum quid facile dixero: ſed ita ſuos*

regere ut felix gubernatio etiam in poſteris continuetur, hoc quibus laudibus efferam non ſatis habeo: ſi illud Divinum quid appello, in aſſentationis ſuſpicionem venio: ſi quid eo minus dico, mihi ipſe non ſatisfacio. Heroas certé & principes illos qui cùm omnia quæ ad ſuã Rempub. pertinent, tum veró in primis ad ejus perpetuitatem optimæ ſpei juventutis inſtitutionem omni ſtudio procurant & promovent, meritó hiſtorici omnes celebrabunt,

----vatumq; tabellæ

Vos ſuper aſtra ferent.

Juventutis veſtræ inſtitutionem multis partibus contineri & perfici videtis, atque in iis liberalium artium cognitionem locum non poſtremum obtinere arbitramini: meritó. Liberalibus enim artibus imbuti & Dei verbum verius ac conſtantius promulgant, quia veritas veritati ſemper conſentanea eſt: & Reipub. ſibi commiſſas partes prudentius feliciusq; adminiſtrant; quia rerum cauſas & conſequentias diligentius exquirunt, præſertim ſi mathematicas diſciplinas didicerint. Matheſis enim, ut recté Clariſſimus ille piæ memoriæ P. Ramus præceptor meus, mentem erigit & excitat, unaq; præ cæteris omnibus artibus hominis judicium ſtabilit & confirmat. Itaque etiam Pythagoras, Plato, Ariſtoteles nobiliſſimi & præſtantiſſimi philoſophi, principia phyſicæ & politicæ in mathematicis diſciplinis collocarunt: cæteramq; philoſophiam matheſi deſtitutam, meram vanitatem, rem ſtolidiſſimam & ſtultiſſimam eſſe factis ſuis aperté docuerunt. Arithmeticæ enim & Geometriæ imperitos (eos intelligo qui natura ab iis artibus alieni ſunt) ut inſipientiſſimos & amentiſſimos homines ſcholis & lectionibus ſuis ſemper interdixerunt: tanti momenti apud veteres fuit mathematicum non eſſe. Certé ſi Epicurus bis bina quid eſſent didiciſſet, rerum cauſas temeritati nunquam adſcripſiſſet. Matheſis, Matheſis inquam, ad bene philoſophandum in primis neceſſaria eſt. Arithmeticam igitur primam matheſeos claſſem Latiné hîc inſtituo, ubi ſi artis materiam ſpectes, duas tantúm leges κατὰ παντὸς, & καθ' αὑτὸ: hoc eſt perpetuam præceptorum & veritatem, & cum arte in qua exponuntur congruentiam: ſin ejus formam, methodum á no-

tioribus

tioribus ad minus nota quám diligentiſſimé potui obſervavi. Totum opus in duos libros diviſi, ſingulos libros ſuis capitibus, & capita ſuis verſibus diſtinxi: item verſuum alios demonſtravi, alios quaſi per ſe manifeſtos ſimpliciter expoſui: neque enim philoſophi cujuſquam eſt omnia artis ſuæ præcepta demonſtrare. Quid præterea? é demonſtratis verſibus alios adhibitis exemplis, alios abſque exemplis propoſui: utrobique tamen præceptorum uſus eſt, hîc philoſophicus ad demonſtrandum generale, illic etiam popularis ad concludendum ſingulare. Porró quia

Omne tulit punctum qui miſcuit utile dulci,

honeſtum ab utili quoad potui nunquam ſejunxi. Factum meum veſtris Generoſitatibus probatum iri confido. Quamobrem Deum Optimum Maximum per Chriſtum precatus ut Generoſiſſimos Comites Waldeccenſes Clementiſſimos Dominos & Mecœnates meos omni benedictionis & felicitatis genere cumulet, finem ſcribendi facio. Heidelbergæ Calend. Januariis 1579.

Veſtrarum Generoſitatum

Obſervantiſſimus

Bern. Salignacus.

AD BERNARDUM SALIGNACUM Juris Licentiatum & scholæ *Corbachianæ Conrectorem.*

QUám varios hominũ ſenſus, Bernarde, recludunt
Tempora, queis præceps Gallia noſtra ruit!
Æſtuat hic armis nequicquam: illum eſca malorum
Ambitio, aut cæcum divitiæ illaqueant:
Hic fœdos repetit vomitus, auramque fugaci
Divinam incautus figere pergit humo.
Heu multos fragilis fallunt ludibria vitæ:
Heu paucos tangit Relligionis amor.
Tu ſtrepitum exilio, fumos, vanamq; bonorum
Permutas ſpeciem, dum meliora petis.
Oblectas etenim ſtudiis lacrymabile tempus,
Atque aliis natum te meminiſſe juvat:
Tum fovet hæc inter melioris neſcia falli
Spes vitæ: O felix quis neget exilium,
Cum fructu nobis quo percipienda reponis,
Percipis ac ulla non moritura die?

CL. MA. AUR. MED. D.

O vi

Ὅτι κατὰ τὸν Ἐπίχαρμον

Ὁ βίος ἀνθρώποις λογισμοῦ κἀριθμοῦ δεῖται πάνυ,
Ζῶμεν δ' ἀριθμῷ καὶ λογισμῷ. ταῦτα γὰρ σώζει βροτούς.

Δεῦτε φίλοι παῖδες, τοῖς ἐς φρένα μῆτις ἐγέρθη,
Εἴσομαι (αἴκε τύχοιμι σκοποῦ) τὴν χρείαν ἀριθμῶν.
Ἔνθα γὰρ ἐλλόγιμον ῥὰ φυῆς μῦθος ὦρσεν ἡμῖν,
Θεσπεσίη σοφίη φύσεως πέρι, ἠδὲ καὶ ἄστρων,
Ἐμμελέες φθόγγοι τε, καὶ ὄψις, καὶ τό γε μέτρον.
Σκέπτετ' ἀριθμὸς ἅμ' ἰσημεριῶν καὶ τῶν ἐνιαυτῶν
Ἠδὲ στρεπτὸν πέρας, ἠδὲ ῥοπὰς, κόσμοιό τ' ἀμοιβὰς
Συμμέτρως ἴσας, τὰ παλίντονα κ' ἔργα πρὸς αὐτοῦ
Πλὴν βιοτὸν τεχνηέντως ἴθυνε λογισμός.
Τὼς δὲ τὰ δημοσίων ἔτι καὶ πτολίεθρα ἀριθμοὶ
Οἰκονομοῦσι, μὲν αὐτουργῶν πάντ' ἔργα τιθέντες
Ἄκρατα, συμβασίων, ῥητῶν δὲ τὰ ἴσα λέγοντες,
Χαλκοῦ τε κρᾶσιν χρυσοῦ τε καὶ ἀργυρείοιο,
Τῶν δὲ φόρων νόμον, ἢ πολεμήϊα πράγμαθ' ἕλοντο.
Νόσφιν ἀριθμῶν οὐδ' ἡ σύμβασις ἢ μὲν ἑταίρων
Ἔμπεδος, ἡ δέ γε πραγματέων νόμος ἔμμονος οὐδείς.
Ὡς βίος ἀνθρώποιο ἀριθμὸς, ἅπαντά τ' ἀριθμοί.
Δεῦρ' ἄρα νηπιέη Κορβακκείοιο, ἀριθμῶν
Πρόσλαβε τὴν μέθοδόν τε νέην, καὶ δόγμα νοητόν.
Ἄσκεε πρὶν τό γε, κρίνε δ' ἔπειτ', ἀγάπαζε τέλος δὲ,
Γυμνασίου δὲ στέργε τάδ' οἷα Θαλύσια κοινοῦ.

JODOCUS JUNGMAN
Caſſellanus.

Eorundem verſio Latina.

Quod ſecundum Epicharmum
Vita hominibus ratione & numero indigeat prorſus,
Vivamus autem numero & ratione. Hæc enim ſervant mortales.

Adeſte chari pueri, quibus in mente prudentia excitata eſt,
Aggrediar (ſi ſcopum aſſequi poſſum) uſum numerorum.
Inde enim eximium ſanè robur ingenii oritur nobis,
Mirifica ſapientia de natura, vel etiam aſtris,
Concinni ſoni, & ratio videndi & menſurandi modus.
Contemplatur numerus ſimul hiſtoriarum & annorum
Sive revolutiones, ſeu puncta ſolſtitiorum, & mundi viciſſitudines
Convenienter æquales, & reflexa opera ipſius:
Adhæc vitam artificioſé moderatur ratiocinatio.
Sic ea quæ ſunt Reipub. & civitates numeri
Adminiſtrant: artificum omnia opera conſtituentes
Sincera, contractuum & pactorum æqualitatem dicentes,
AEris etiam temperamentum & auri atque argenti,
Tributorumque legem, & bellicas res eligunt.
Sine numeris neque conventio ſive quidem ſociorum
Firma, ſive negotiationum lex conſtans ulla.
Sic vita hominis numerus eſt, omniaque ſunt numeri.
Huc igitur age pueritia Corbaccenſis, & numerorum
Accipe methodum hãc novam & doctrinã quæ intellectu percipitur.
Exerce prius hanc, judica deinde, amplectere demum:
Gymnaſii autem boni conſule has ceu frugum primitias novi.

BERNAR-

BERNARDI SALIGNACI BURDEGALENSIS ARITHMETICÆ LIBER primus.

De definitione & diviſione Arithmeticæ déque numerorum notatione. Cap. I.

1. ARITHMETICA *eſt ars numerorum.*

Arithmetica eſt ars, id eſt methodica præceptorum perpetuó verorum & homogeneorũ diſpoſitio. ut enim in arte verofalſum cõvincas, ejus præcepta perpetuó vera eſſe oportet: ſic artem certiſſimam & conſtantiſſimam habituri ſumus. Perpetuó etiam homogenea præcepta requiruntur, ut ſic unicuiq; quod ſuum neceſſarió eſt; & omne & ſolum tribuatur: nihil alienum aut imperfectum in diſciplinis habeatur. Certé ſi perfectionem hîc non aſſequimur, ad eam tamen aſpiramus. In primis veró ars methodicam diſpoſitionem requirit: nam niſi quod natura ſua primum eſt primo loco, quod ſecundum ſecundo, & ſic deinceps unumquodque diſponatur; ut maximé præcepta perpetuó vera & homogenea ſint, attamen eorum inter ſe cõfuſio artem nobis obſcuriſſimam & difficillimam faciet. Sic locum habebit Horatianum illud

---- Brevis eſſe laboro?
Obſcurus fio.

Atqui ars cum ſumma brevitate ſummam facilitatem & lu-

cem habere conjunctam debet. Ergo in Arithmeticæ deſcriptione ſummæ veritatis, ſummæ juſtitiæ & ſapientiæ leges mihi propoſitæ ſunt: faxit Deus Optimus Maximus & per Chriſtum pater, ut eas ad nominis ſui gloriam & ſuorum utilitatem diligenter perpetuò obſervem. Arithmetica inquam ars eſt: ſed omnis ars alicujus eſt: ergo Arithmeticam nō ſimpliciter artem, ſed numerorum artem dicimus. Numerorum appellatione tam unitatem quám multitudinis numerum, tam integros numeros quám unitatis partes & particulas quaſlibet intelligimus. Numerus enim quantitas eſt mathematica diſcreta. Quantitas eſt: ei enim æqualitas & inæqualitas attribuitur: & quidem non quævis quantitas, ſed mathematica & diſcreta. Circa numerum enim mathematicus verſatur, & numeri partes communem terminum nullum habent. Sic numerum á magnitudine quæ quantitas mathematica eſt, ab oratione quæ quātitas diſcreta eſt, & ab omni alia quantitate quæ mathematica diſcreta non eſt, diſtinguimus. Sic inquam 1, 2, 3, ſic $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, $3\frac{6}{7}$, numeros: artem aūt quæ hujuſmodi numerorum naturam & proprietates interpretatur, Arithmeticam dicimus.

2. *Partes Arithmeticæ duæ ſunt: prima eſt quæ numerorum notationem & numerationem explicat.*

3. *Notatio eſt ſcripturæ numerorum explicatio, ejuſque partes duæ ſunt.*

4. *Prima Arithmeticarum notarum valorem explicat. Notæ quibus numeros ſcribimus decem ſunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.*

5. *Et conſiderantur per ſe aut inter ſe: priores novem per ſe aliquid valent.*

Sic 1 valet unum, 2 duo, 3 tria, 4 quatuor, 5 quinque, 6 ſex, 7 ſeptem, 8 octo, 9 novem.

6. *Circulus quæ decima nota eſt, per ſe nihil ſignificat.*

Decimam notam de ſuæ figuræ nomine circulum appellamus.

7. *Atque hæc de notis per ſe: eæ veró inter ſe gradibus & periodis diſtinguntur. Gradus eſt locus ſecundum quem notæ valor æſtimatur.*

In explicandis deinde graduum generibus à dextra ſiniſtrorſum ſemper procedo.

8. *Gradus duplex eſt, primus & ſequens. Primus eſt in quo nota idem valet quod per ſe: Sequens eſt in quo notæ valor eſt multiplus primi: eſtque ſecundus aut tertius. ſecundus primi decuplus, tertius ejuſdem centuplus eſt.*

Exempli gratia hæc nota 1 per ſe valet unum: ergo in primo gradu valebit quoque unum: verúm in ſecundo & tertio gradu poſita ſic 10, 100, illîc decem, hîc centum valebit. Similiter hæc nota 2 per ſe valet duo: ergo in primo gradu valebit quoque duo: verúm in ſecundo & tertio gradu poſita ſic 20, 200, valebit illîc viginti, hîc ducenta: idem de cæteris dicendum. Ex his autem colligere eſt circularem notam quæ per ſe nihil valet, valere tamen ad alias antecedentes notas amplificandum.

9. *Hactenus de gradibus: periodi ſequuntur. Periodus eſt certa quædam comprehenſio: eſtq; primúm perfecta aut imperfecta. Perfecta eſt quæ perfecto ternario graduum conſtat.*

Ut in periodis illis 100, 100000, 100000000, centum, centies millia, centies millies millia. Hîc ſemper perfectè tres gradus ſunt, nempe in primo exemplo ſemel, in ſecundo bis, in tertio ter: quare hujuſmodi periodi perfectæ ſunt.

10. *Periodus imperfecta eſt quæ imperfecto ternario graduum conſtat.*

Imperfectum ternarium dico qui perfecto ternario æquè multiplici minor eſt, ut in periodis 10, 1000, decem, mille. Hîc ternarius primæ periodi unicus eſt, quem perfectus ternarius unicus ſuperat uno: ſecundæ periodi ternarius duplex eſt, quem perfectus ternarius duplex ſuperat duobus: quare hujuſmodi periodi imperfectæ ſunt.

11. *Item periodus eſt ſimplex aut compoſita. Simplex eſt quæ unico ternario graduum conſtat.*

Ut 10, 100. hîc ternarius graduum unicus, nempe in primo exemplo imperfectus, in ſecundo perfectus eſt. hujuſmodi igitur periodi ſimplices ſunt.

12. *Compoſita periodus eſt quæ pluſquam unico ternario graduum conſtat.*

Ut hîc 1000, 100000, 10000000, mille, centum millia, decies millies millia. Hîc ternarius graduum in duobus primis exemplis duplex, in tertio triplex eſt: quare hujuſmodi periodi compoſitæ ſunt. In periodo autem compoſita tres gradus quoties libuerit continuare licet: tumq; (à dextra progredior) primam periodum generali periodi nomine, ſecundam periodum millium, tertiam millies millium, quartam millies millenorum millium appellamus. ut in hoc exemplo, 123456-789312 centum viginti tria millies millena millia, quadringenta quinquaginta ſex millies millia, ſeptingenta octoginta novem millia, trecenta duodecim. Galli brevius pro millies millibus & millies millenis millibus, milliones & milliardos dicunt. Atque hæc de prima notationis parte, ſequitur ſecunda.

De

De ſecunda notationis parte. Cap. II.

1. *SEcunda pars notationis eſt quæ numerorum terminos & ſpecies explicat.*

2. *Termini ſunt qui circa numerum ſtant, eúmque comprehendunt.*

Ut enim in magnitudinibus, ſic in numeris ſui quidam termini ſunt, licet diſſimiliter: nam inter terminum & terminatum illic intervallum aliquod eſt, hîc nullum eſt.

3. *Termini numerantes aut nominantes ſunt: illi comprehenſum numerum numerant, hi eum nominant: & cum ſimul ſcribuntur, tunc numerantes nominantibus ſuperiores ſiunt.*

Ut hîc $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, una unitas, duę unitates, una ſecũda, duę tertiæ. Termini ſuperiores vulgó numeri, inferiores nomina appellantur. Hujus diſtinctionis veritas in partibus quidem notiſſima eſt: in integris autem minús percipitur, quia vera integra vulgó brevius & ſcribuntur & dicuntur. Sed uſitata brevitas rerum veritatem non tollit.

4. *Species numerorum, numeros terminis comprehenſos dico. hujuſmodi numeri primarii ſunt aut ſecundarii. Primarii ſunt quorum cognitio primaria eſt: ſuntq; vera integra aut vera partes. Vera integra plerunque unico ordine ſcribuntur.*

Ut 125, 54689. plerunque inquam, aliquando enim (ut in numeratione miſta proportionata) vera integra duobus etiá ordinibus ſcribuntur ſic $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$. nam & cúm unum, duo, tria, quatuor, dicimus; unam, duas, tres, quatuor, unitates intelligimus. Sed quod diligenter notandum eſt, quoniam verorum integrorum nomen ſemper unitas eſt, ideó eorum ſolas

numeros vulgó & dicimus & ſcribimus: ſic enim brevitas & facilitas major eſt.

5. *Vera integra ſunt unitatis aut multitudinis. Unitas eſt principium multitudinis. multitudo eſt collectio unitatum. Itaque minimus verorum integrorum eſt unitas, maximus dici nequit.*

Vulgó unitatem numerum eſſe negant, ſuamque opinionem variis argumentis tuentur: tria ex iis præcipua hîc referam. Primum argumentum eſt. Numerus eſt multitudo, ſed unitas nõ eſt multitudo, ergo, &c. Huic reſpondetur per propoſitionis diſtinctionem: nam & populariter & quodammodo philoſophicé numerum eſſe multitudinem concedo, ſed philoſophicé ita concedo, ſi de numero multitudinis agatur; at ſi de numero in genere, illud nego. Generaliter enim numerum quantitatem mathematicam diſcretam definivimus, quæ definitio etiam unitati competit.

Secundum argumentum eſt. Numerus dividi in partes poteſt, quia eſt quantitas: unitas non poteſt, quia eſt in numeris quid ſimpliciſſimum: ergo, &c. Sed primúm huic aſſumptioni contradicimus. Unitas enim dividi poteſt, quia eſt quantitas: ei nempe æqualitas & inæqualitas attribuitur. Deinde unitatem eſſe quid in numeris ſimpliciſſimum ita verum eſt, ſi de numeris integris agatur: at ſi de numeris in univerſum, illud nego. unitatem enim duabus tertiis, & tribus quartis majorem eſſe verum eſt. Præterea ut magnitudines in ſingulis magnis, ſic unitates in ſingulis numeratis ſunt: quare ſi unitas dividi nequeat, nec magnitudines quoq; dividi in partes poterunt, quod falſum eſt.

Tertium argumentum eſt. Si unitas numerus eſt, & punctum quoq; mathematicũ magnitudo erit, quod abſurdum eſt. Sed hoc connexum negabitur: neque enim unitas puncto in omnibus reſpondet. Unitas in ſe ducta unitatem, at pun

ctum

ctum in ſe ductum lineam facit. unitas ad unitatē addita plures unitates facit, at infinita puncta ad punctum aliquod addita unicum punctum faciunt. unitas numeri multitudinis pars eſt, punctum nullius magnitudinis pars eſt. unitas ſuas partes habet, punctum mathematicum nullas habet. quare etſi unitas numerus ſit, non ideó tamen punctum magnitudinem eſſe neceſſum eſt.

6. *Datorum integrorum unitates non ſunt infinitæ.*

Poſtulatum hoc poſtea ad 4 verſ. 11. cap. adhibebitur.

7. *Veræ partes ordinibus ſupero inferoque recta iis media ſcribantur: ſuperior ordo inferiore minor eſt.*

Ut hîc $\frac{1}{2}$, $\frac{35}{56}$. Explicatio exempli primi eſt una ſecunda, ſecundi triginta quinque quinquageſimæ ſextæ: denique ut nomen verorum integrorum 1 intelligitur, ſic verarum partium nomen ſemper aliquis multitudinis numerus eſt. At ſunt qui hîc objiciant partes veros numeros non eſſe: quia, inquiunt, veri numeri denominationem non habent. Sed inquam ego, cúm 1, 2, 3, 4, dicimus, totidem ſemper unitates intelligimus: quare etſi hujuſmodi numerorum denominatio non exprimitur, non ſequitur tamen quin ea ſit. Cur autem ea vulgó non uſurpetur, ſuprá ad 4 verſ. hujus cap. docui. Sed hoc illos movet: putant ſcilicet nos in partibus ſenſiles aliquos numeros proponere, quod mathematica nō admittit. Atqui abſurdum eſt partes unitatis ſenſiles putare, cúm ipſæ unitates ſolá mente percipi poſſint. Inſtant: nam ſi partes veri numeri ſint inquiunt, impar numerus erit par: cujuſque enim numeri dimidium verus numerus erit. Sed hoc quoque connexum negabitur: neque enim parem numerum dicemus quem binarius dividit, ſed quem binarius metitur. Binarius ut dari cujuſvis numeri diviſor ſit, non tamen ſtatim ejuſdem menſura eſt. Sed res ingeniis non contentioſis luce clarior eſt: unitatis enim partem aliquā tam parvam dari qua minor alia dari nequeat, impoſſibile eſt: hujuſmodi

autem particulæ quantitates mathematicæ ſunt, neque ullum unquam communem terminum habent: quare ex generali numeri definitione partes unitatis veri numeri ſunt.

8. *Pars minoris nominis parte nominis majoris major eſt.*

Sic $\frac{1}{2}$ major eſt quám $\frac{1}{3}$, item $\frac{1}{3}$ major quám $\frac{1}{4}$. *Itaque*

9. *Singularium partium maxima eſt $\frac{1}{2}$. minima dici nequit.*

Singulares partes dico quarum numerus eſt 1. harum maxima ut quoque integrorum minimus dicitur: minima dici nequit, ſicut nec integrorum maximus dici poteſt.

10. *Hactenus de primariis numeris. Secundarii ſunt quorum cognitio ſecundaria eſt: ſuntq; ſimplices aut compoſiti.*

11. *Simplices duobus tantúm ordinibus ſcribuntur, & ſunt integri aut partes. Integri abſque linea ſcribuntur.*

Sive ut integri tantúm conſiderentur, ſive ut integri & partes, nihil intereſt: ut in $\frac{2}{3}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{7}$, $\frac{3}{4}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{8}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{9}$, duabus tertiis quatuor ſeptimarum, tribus quartis quinque octavarum ſeptem nonarum. In primo exemplo $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{7}$ integra tantúm ſunt; in ſecundo $\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{8}$ antecedentium integra, ſequentium partes ſunt: utrobique autem hujuſmodi integra nullam interjectam lineam habēt.

12. *Partes media ſuis ordinibus linea ſcribuntur: earum ordo ſuperior ſi inferiori æqualis ſit, partes unitati æquales; ſi major, partes unitate majores ſignificat.*

Sic in $\frac{3}{3}$ & $\frac{5}{3}$ partes illîc unitati æquales, hîc unitate majores ſunt.

13. *Compoſiti numeri ſecundarii ſunt qui pluribus ordinibus quám duobus ſcribuntur.*

Sic $2\frac{5}{8}$ compoſiti ſecundarii numeri ſunt. Hactenus de notatione, ad numerationem jam venio,

De nu-

De numeratione in genere, & de numeratione æquata. Cap. III.

1. *NUmeratio eſt quæ datis duobus numeris legitimé tertium invenit.*

Hinc patet, ſi numeri duobus plures numerãdi ſint, binos numerandos eſſe: numeratio enim duobus tantúm tertium invenit. Itaq; ſi 3, 4, & 7 ſimul addendi ſint, primó addentur 3 & 4, deinde eorum ſumma ad 7 addetur. Præterea numeratio non quovis modo, ſed legitimé tertium invenire dicitur: ſi igitur numerationis lex tertii inventionem non patiatur, ut cúm 2 é 2, 3 é 3 tollendi ſunt, numeratio tertium numerum nullum inveniet.

2. *Dati duo numeri notis ſcripti duabus quidem toti, pluribus autem per partes numerantur.*

Sic dicimus 3 & 4 eſſe 7, & ter 4 eſſe 12. Verũ ſi ad 52 addendi ſint 64, hîc primúm 4 ad 2 deinde 6 ad 5 addimus. Si multiplicandi ſunt 7 per 36, primúm 7 per 6, deinde eundem per 3 multiplicamus: idẽ enim eſt numerare per totum & per partes. Verũ in numeratione per partes facilitas aliqua ineſt major, quia faciliús numeros parvos quám magnos numeramus.

3. *In hujuſmodi per partes numeratione duo notanda ſunt: primum eſt, numerorum notas inter numerãdum quaſi ſolitarias conſiderari.*

Sic in additione 47 ad 32, additis 2 & 7, reliqui numeri jam non ut 30 & 40 ſed ut 3 & 4 conſiderantur: ſic enim facilitas major eſt.

4. *Alterum eſt, ſi nota ſcripta inter numerandũ delenda deinde ſit, eam cũ notis proximis numerandã mente retineri.*

In additione 56 ad 38 primúm dicimus 8 & 6 eſſe 14, ſed deinde additis 3 & 5 ſcripta 1 delenda eſſet: eam igitur mente reſervabimus: ſic enim brevitas major futura eſt.

5. *Numerationis duplicem diſtinctionē facimus. Primúm numeratio æquata aut proportionata eſt. Æquata eſt cui æqualitas legem præſcribit: eſtq; additio aut ſubductio. Additio á dextra incipit, & datos addit, ut ſummam iis æqualem inveniat.*

Sic 10 ſumma 3 & 7, ipſis 3 & 7 æqualis eſt: totum enim ſuis partibus ſimul omnibus ęquamus. Additionis autem propriū ſignum ſignificans plus, ſic eſt +. ſic dicimus 3+7 eſſe 10.

6. *Additionis proprietates duæ ſunt. prima ſic eſt: Si numeris æqualibus æquales addantur, ſummæ æquales erunt.*

Sic ſi ad 4 & 4 addideris 7 & 7, ſummę 11 & 11 æquales erūt.

7. *Secunda proprietas ſic eſt: ſi numeris inæqualibus æquales addas, ſummæ additis inæqualibus ſimiliter inæquales erunt.*

Sic ſi datis 5 & 6 addas 4 & 4, ſummæ 9 & 10, additis 5 & 6 ſimiliter inæquales erunt: hoc eſt quanto 5 eſt minor quám 6, tanto 9 minor erit quám 10.

8. *Subductio á ſiniſtra incipit, & datorum alterum ex altero ſubducit, ut reliquus cum ſubducto ei á quo ſubductio fit æqualis habeatur.*

Sic ſubductis 7 é 10 reliquus 3 cum 7, ipſi 10, æqualis erit: partes enim ſimul omnes ſuo toti æquamus. Subductionis autem proprium ſignum ſignificās minus, ſic eſt –. Sic dicimus 10–7 eſſe 3, vel 10–3 eſſe 7. Additio ex data ſubductione, & contrá ſubductio ex data additione recté cōcluditur. Si dederis 10–7 eſſe 3, vel 10–3 eſſe 7, concludā 3+7 eſſe 10: & é contrá ſi dederis 3+7 eſſe 10, concludā 10–7 eſſe 3, vel 10–3 eſſe 7. Neq; tamen vulgo arithmeticorum aſſentior exiſtimantium factam additionē ſubductione probandā eſſe, & contrá. Nā ad factæ additionis probationē ſubductio non datur ſed quæritur, in cujus inventione non minus q̃ in facta jam additione

peccari poteſt. Dices, Quomodo igitur in additione ſummã additis, in ſubductione reliquũ cũ ſubducto alteri dato ęqualem probabimus? Reſpondeo, ſatis eſſe ſi additionum & ſubductionum regulas inter numerandum ſequutus ſis: ſi dubites utrum ſequutus ſis, iterum datos ſimiliter numerabis.

9. *Subductionis proprietates duæ ſunt. prima ſic eſt: ſi é numeris æqualibus æquales tollas, reliqui æquales erunt.*

Sic ſubductis 3 & 3 é 9 & 9, reliqui 6 & 6 æquales erunt.

10. *Secunda ſic eſt: ſi é numeris inæqualibus æquales, vel ex æqualibus inæquales tollas, reliqui datis inæqualibus directó vel contrá ſimiliter inæquales erunt.*

Sic ſubductis 4 & 4 é 7 & 6, reliqui 3 & 2 datis 7 & 6 ſimiliter inæquales ſunt: vel ſi mavis quanto 7 excedũt 6, tanto 3 excedunt 2. Item ſubductis 3 & 5 é 9 & 9, reliqui 6 & 4 datis 5 & 3 ſimiliter inæquales ſunt, vel ſi mavis quãto 3 minor eſt quám 5, tanto 6 major eſt quám 4.

De numeratione proportionata & præſertim de multiplicatione. Cap. IIII.

1. *PRoportionata numeratio eſt cui proportio legem præſcribit: eſtq; multiplicatio aut diviſio.*

Proportionis, ſicut antea ęqualitatis, nomẽ logicum eſt: & ut antea æqualitatis in additione & ſubductione, ſic modó proportionis in multiplicatione & diviſione leges clariſſimæ & facillimæ futuræ ſunt.

2. *Multiplicatio á dextra incipit, & datos inter ſe multiplicat, ut numerum faciat qui ſit ad alterum multiplicatorum, ut reliquus eſt ad unitatem.*

Sic cúm 3 multiplicamus per 4, numerum quęrimus qui ſit ad 3 ut 4 eſt ad unitatem, vel qui ſit ad 4 ut 3 eſt ad 1. Hic inventus numerus proprio nomine factus dicitur. Multiplicationis proprietates ſequuntur.

3. *Si duo numeri quovis modo inter ſe multiplicentur, facti ab iis æquales erunt.*

Sive 2 per 4 ſive 4 per 2 multiplices, æquales numeros facies. Via Athenis Thebas eſt via Thebis Athenas.

4. *Si numerus plures numeros eorumq; ſummam multiplicet, factus á ſumma facto á cæteris æquabitur.*

Idem enim eſt multiplicare per totum & per partes. Itaq; facti á 4 per 3, 5 & 7 facto á 4 per eorum ſummã 15 æquabũtur.

5. *Partes inter ſe æquales erũt, quando facti ab earum numeris per alternum nomen inter ſe æquabuntur.*

Æqualitatis partium definitio quædam eſt ex alterna terminorum multiplicatione. Itaq; in $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{6}$ ſi factus á 4 per 3 facto á 6 per 2 æqualis ſit, $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{6}$ inter ſe æquales erunt.

6. *Si tres numeri inter ſe inæquales ſint, factus á ſumma differentiarum medij ab extremis per medium, factis á differentiis per alternos extremos æquabitur.*

Superiorum proprietatum veritas per ſe manifeſta fuit, hujus non item: eam igitur breviter demonſtro. Tres numeri inter ſe inæquales ſunto 16, 11 & 9, tumq; differẽtiæ medii 11 ab extremis 16 & 9 ſunto 5 & 2: & sũma differentiarũ 5 & 2 eſto 7.

	16	2	
11			7
	9	5	

Dico factum á 7 per 11 factis á 2 per 16 & 5 per 9 æquari. hoc ſic doceo. primúm enim per 4 verſ. hujus cap. factus á 7 per 11 factis á 2 per 11 & á 5 per 11 æquatur: nam per theſim 5 + 2 ſunt 7. deinde facti á 2 per 11 & 5 per 11 factis á 2 per 11, 5 per 2, & 5 per 9 æquantur: nam ex theſi 11 − 2 eſt 9. quare per ſcholium 8 verſ. 3 cap. 2 + 9 eſt 11. ideoq; per 4 verſ. hujus cap. facti á 5 per 2 & 5 per 9 facto á 5 per 11 æquantur. ideoq; per 6 verſ. 3 cap. facti

ctiá 2 per 11 & 5 per 11 factis á 2 per 11, 5 per 2, & 5 per 9, hoc eſt per 3 verſ. hujus capitis factis á 2 per 11, 2 per 5, & 5 per 9 æquātur. Deniq; ob eaſdē cauſas facti á 2 per 11, á 2 per 5, & á 5 per 9 factis á 2 per 16 & á 5 per 9 æquantur. Ergo á primo ad ultimū factus á 7 per 11 factis á 2 per 16 & 5 per 9 æquabuntur. Hæc propoſitio ſummum vel potiús unicum Archimedeæ alligationis, ſi matheſin ſpectes, fundamentum eſt.

Arithmeticus diſcipulus notarum ſingularum multiplicationem addiſcat ut ſequitur.

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	6 6	7 7	8 8	9 9
4 2	6 3	8 4	10 5	12 6	14 7	16 8	18 9	
9 3	12 4	15 5	18 6	21 7	24 8	27 9		
16 4	20 5	24 6	28 7	32 8	36 9			
25 5	30 6	35 7	40 8	45 9				
36 6	42 7	48 8	72 9					
49 7	56 8	63 9						
64 8	72 9							
81 9								

Hîc ſingulæ inferiores notæ per primam ſui ordinis multiplicantur. Sic in primo ordine unitas primúm ſeipſam multiplicat: deinde per eam multiplicantur 2,3,4,5. Sic in ſecundo ordine 2 primúm ſeipſum multiplicat, deinde etiã per 2 multiplicantur 3,4,5,6,7: & ſic de cæteris. facti autem ſemper ſuis multiplicatis ſuperſcribuntur.

De diviſione. Cap. V.

1. *Diviſio á ſiniſtra incipit, & alterum datorum per reliquum dividit, ut quotus habeatur qui ſit ad dividendum ut unitas eſt ad diviſorem.*

Sic cúm 12 per 4 dividimus, quotum quærimus qui ſit ad 12 ut 1 eſt ad 4. Diviſionis proprietates aliæ unicam diviſionẽ, aliæ multas comprehendunt: proprietatis unius diviſionis priore loco explico.

2. *Si diviſor dividuo æqualis ſit, dividuum metietur per 1.*

Sic 4 metitur 4 per 1, 6 metitur 6 per 1. Generaliter autem numerus is metiri datum numerum dicitur, qui ſubductus é dato quoties poteſt, nihil relinquit. Hęc menſuræ numeri definitio eſt: unde efficitur ut & major numerus minorem metiri nequeat, neq; enim majorem é minore ſubduxeris: & quotus inventus aliquis integrorum ſit, hîc enim qui é dato ſubducitur quoties poteſt, nihil relinquit. Deniq; in arithmeticis metiri dividere eſt, non contrá: dati enim numeri menſura ejus diviſor eſt, non contrá.

3. *Si diviſor dividuo major ſit, quotus veras partes dabit, quarum numerus quidem ipſe dividuus, nomen autem diviſor eſt.*

Sic cúm dividimus 5 per 12, quotus eſt $\frac{5}{12}$.

4. *Si diviſor dividuo minor ſit, is dividui pars aut partes erit.*

Hic

Hîc partem partibus, ut unum multis, oppono.

5. *Si diviſor dividui pars ſit, hujuſmodi partis numerus quidem unitas, nomen autem erit ipſe quotus.*

Diviſor dividui pars eſt qui dividuum ipſo minorem per integrum multitudinis metitur. quoniam enim diviſor metiens, dividuo minor eſt, ideo per integrum multitudinis eũ metitur. Ergo 4 minor quám 20 metiatur ipſum 20 per 5, hîc per proximum verſiculum 4 erit $\frac{1}{5}$ é 20.

6. *Si diviſor dividui partes conſtituat, hujuſmodi partium numerus quidẽ diviſor, nomẽ autẽ erit ipſe dividuus.*

Diviſor dividui partes conſtituit qui dividuum ipſo majorem non metitur, ſed é dividendo ſubductus quoties poteſt, aliquid relinquit ipſo minus. 7 ſubductus é 20 quoties poteſt, relinquit 6, qui reliquus diviſore 7 minor eſt: ergo diviſor 7 erit $\frac{7}{20}$ é 20. Hactenus de proprietatibus unius diviſionis, ſequentes proprietates multas diviſiones comprehendunt.

7. *Si plures numeri eundem numerum dividant & diviſores æquales vel inæquales ſint, quoti quoq; æquales vel inæquales erunt.*

Si 12 per 2 & 2, vel per 2 & 3 dividas, quotos illîc æquales hîc inæquales invenies.

8. *Dividuus á dato per tertium, dividitur á tertio per datum.*

Si 12 dividatur á 3 per 4, idem á 4 per 3 dividetur.

Itaque

9. *Si verus integer metitur datum, quotus inventus eundem quoque metietur.*

Sic ex cauſa effectum concludo.

10. *Si numerus idem plures numeros eorumq; ſummam dividat, quotus ſummæ cæterorum quotis æquabitur.*

Idem eſt dividere per totum & per partes. itaq; quotiē 6, 12, & 16 per 2, quoto ex eorum ſumma 34 per 2 æquabuntur.

Itaque

11. Si numerus plures datos metiatur, eorum quoque ſummam metietur.

Alioqui quotus ſummę quotis particularium inæqualis eſſet contra 10 verſ.

Et

12. Si numerus datum & dati partem alteram metiatur, reliquam quoque metietur.

Cauſa proximæ ſuperiori eadem eſt.

13. Si numerus menſuram dati metiatur, datum quoq; metietur.

Metiens enim menſuram dati, iteratus quoties opus eſt ipſa dati menſura eſt.

14. Si numerus numerum metitur, metiens quidem maxima utriuſque communis menſura, dividuus autem minimus ab utroque dividuus erit.

Communis menſura eſt numerus qui datos metitur: eaq; maxima eſt, ſi alia communis major dari nequeat. ſimiliter communis dividuus eſt numerus quem dati metiuntur: iſque minimus eſt, ſi alius communis minor dari nequeat. Jam datus 4 datum 12 metiatur, dico 4 eſſe maximam communem menſurā ipſorum 4 & 12. Communis menſura eſt: ipſe enim 4 ſe ipſum metitur per 2 verſ hujus cap. & metitur 12 ex theſi. Amplius, ſi major numerus quám 4 metiatur 4 & 12, major numerus quám 4 metietur ipſum 4, quod erit contra ſcholiũ 2 verſ. hujus cap. Præterea in propoſito dico etiam 12 eſſe communem minimũ dividuum ab ipſis 4 & 12. eſſe communem dividuum patet: nam ex theſi 12 eſt dividuus á 4, & idem á ſe dividuus eſt per 2 verſ. hujus cap. Item ſi minor numerus quám 12 ſit dividuus á 12 & 4, tum 12 metietur numerũ ſe ipſo

minorem

minorem contra ſcholium 2 verſ. hujus cap. Sed hæc ſpecialis eſt & dividui & menſuræ duorum datorum inventio: deinde etiam generalis & menſuræ plurium & dividui á quotlibet datis inventio cap. 15. commodiús docebitur.

15. *Si dati duo numeri aliquem metiantur, minimus ab iis dividuus eundem quoque metietur.*

Dati duo numeri 4 & 6 metiantur 24, & minimus ab iis dividuus eſto 12: hîc inquam 12 metietur 24: nam ſi 12 & 24 æquales ſint, tum 12 metietur 24 per 2 verſ. hujus capitis. Sin autem, tum 12 aut major aut minor erit quám 24. Major eſſe nequit, quia minimus-dividuus á 4 & 6 eſt 12 ex theſi, conſequens igitur eſt ut 12 minor ſit quám 24. Itaq; ſi non metiatur 24, ſublatus é 24 quoties poteſt aliquid relinquet ipſo minus per ſcholium 6 verſ. hujus cap. Reliquũ illud eſto 2 & quod 12 metitur é 24 eſto 22. hîc quia 4 metitur 12 ex theſi, idem quoq; metietur 22 per 13 verſ. hujus cap. ſed idem 4 metitur etiam 24 ex theſi: ergo per 12 verſ. hujus capitis 4 metietur 2, atque ob eaſdem cauſas 6 metietur quoque 2. Sed docui 2 eſſe minorem quám 12: quare 12 non erit minimus á datis 4 & 6 dividuus. At hoc eſt contra theſim.

16. *Si duo numeri ad eundem proportionales ſint, æquales erunt: & contrá.*

Ut 12 ad 6 ſic factus á 3 per 4 ad eundem 6. Hîc inquã 12 & factus á 3 per 4 inter ſe æquabuntur, & contrá ſi 12 & factus á 3 per 4 inter ſe æquales ſint, quotus facti a 3 per 4 diviſi per 6, erit quotus 12 diviſi per eundem 6.

17. *Si quatuor numeri proportionales ſint, iidem quoque alterné & inverſé proportionales erunt.*

Logici præcepti ad Arithmeticam applicatio eſt, & quidem quæ poſthac ſubinde uſurpabitur. Nomen autem pro-

portionis reliquo hoc primo libro quotorum ſimilitudinem tantúm, at hîc ſimilitudinem tam reliquorum quám quotorum ſignificat. Quatuor inquam proportionales ſive alternentur, ſive invertantur, proportionales erunt. Alternantur quando antecedentium alter tantúm, invertuntur quando antecedentium uterque conſequens fit: ut 2 ad 3 ſic 4 ad 6. ergo alterné ut 2 ad 4 ſic 3 ad 6, vel ut 4 ad 2 ſic 6 ad 3. Itē, ut 2 ad 3 ſic 4 ad 6: ergo inverſé ut 3 ad 2 ſic 6 ad 4, vel ut 6 ad 4 ſic 3 ad 2.

Explicatæ numerorum proprietates ſuprá ad 4 cap. é ſola multiplicatione, hoc capite é ſola diviſione ſumptæ ſunt: ſequentes é multiplicatione & diviſione ſimul ſumentur.

De numerorum proprietatibus é multiplicatione & diviſione ſumptis. Cap. VI.

1. SI numerus á duobus datis factus ſit, alter datorum eum per reliquum dividet, & contrá.

Factus á 3 per 4 eſto 12, dico 4 dividere 12 per 3. Hîc enim per theſim & per 2 verſ. 4 cap. ut 12 ad 4 ſic 3 eſt ad 1. ergo alterné, ut 3 ad 12 ſic 1 eſt ad 4. ergo per 1 verſ. 5 cap. 4 dividet 12 per 3. Converſæ demonſtratio perinde facilis eſt. Datus 4 dividat 12 per 3, dico 12 eſſe factum á 4 per 3. Hîc enim per theſim & per 1 verſ. 5 cap. ut 3 ad 12 ſic 1 eſt ad 4. ergo inverſé ut 12 ad 3 ſic 4 ad 1. ergo per 2 verſ. 4 cap. 12 erit factus á 4 per 3.

Itaque

2. Si numerus á duobus integris factus ſit, uterque integrorum eum metietur, & contrá.

E demonſtrato jam genere ſpecies concludatur.

3. Si é tribus datis numeris primus ſequentium alterum dividat, & quotus reliquum multiplicet, factus erit tribus datis quartus proportionalis.

Tres

Tres dati numeri ſunto 3, 15 & 12. tumq; 3 dividat 15 per 5, & factus á 5 per 12 eſto 60, dico ut 3 ad 15 ſic 12 eſſe ad 60. Hic enim ex theſi & per 1 verſ. hujus cap. quotus é 60 per 12 eſt 5, & rurſum per theſim quotus é 15 per 3 eſt idem 5. quare ut 3 ad 15 ſic 12 eſt ad 60.

4. *Si é tribus datis numeris ſecundus reliquorum alterum dividat, & quotus reliquum multiplicet, ut primus eſt ad ſecundum ſic factus erit ad tertium.*

Tres dati numeri ſunto 8, 4 & 6: tumque ſecundus 4 dividat 8 per 2, & factus á 2 per 6 eſto 12. dico ut 8 eſt ad 4 ſic 12 eſſe ad 6. Hic enim quotus é 12 per 6 erit 2 per theſim & per 1 verſ. hujus capitis, & rurſum per theſim quotus ex 8 per 4 eſt 2. ergo ut 8 ad 4 ſic 12 erit ad 6.

5. *Si numerus numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales.*

Numerus 2 multiplicans 4 & 3 fecerit 8 & 6. dico ut 4 ad 3 ſic 8 eſſe ad 6. Hic enim per theſim & per 1 verſ. hujus cap. quoti ex 8 per 4 & é 6 per 3 ſunt idem. quare ut 8 ad 4 ſic 6 eſt ad 3. ergo alterne ut 8 ad 6 ſic 4 eſt ad 3. Hinc eſt quod vulgó dicitur partes ſuis æqué multiplicibus eſſe proportionales.

6. *Si quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis facto á mediis æquabitur.*

Hæc vulgó regula aurea dicitur: & certé matheſis inde fructus pluſquam aureos quotidie percipit. ut 12 ad 4 ſic 6 eſto ad 2. dico factos á 12 per 2 & á 6 per 4 inter ſe æquales eſſe. Etenim factus á 12 per 6 eſto 72. Hic per 3 verſ. 4 capitis factus á 6 per 12 erit quoque 72. Jam ut 72 (qui eſt factus á 12 per 6 per ſab.) ad factum á 12 per 2 ſic per 5 verſ. hujus capitis 6 eſt ad 2 & per theſim ſic 12 ad 4: & rurſum per 5 verſ. hujus capitis ſic 72 (qui eſt factus á 6 per 12,

ut patuit) ad factum á 6 per 4. Ergo á primo ad ultimum ut 72 ad factum á 12 per 2, ſic 72 ad factum á 6 per 4. ergo per 16 verſ. 5 cap. facti á 12 per 2 & á 6 per 4 inter ſe æquantur. *Itaque*

7. Si é tribus numeris datis ſecundus tertium multiplicet, & primus ab iis factum dividat, quotus erit tribus datis quartus proportionalis.

Patet hoc per 1 verſ. hujus capitis. *Et*

8. Si termini partium ſint proportionales, partes inter ſe æquabuntur.

Patet hoc per 5 verſ. hujus cap.

9. Si factus á duobus mediis æquatur facto ab extremis, quatuor dati erunt proportionales.

Hæc regulæ aureæ converſa eſt. Quatuor dati ſunto 12, 4, 6 & 2. tumque facti á 12 per 2 & á 6 per 4 æquentur, dico ut 12 eſt ad 4 ſic 6 eſſe ad 2. Etenim facti á 12 per 6 & á 4 per 6 ſunto 72 & 24. Hîc per 5 verſ. hujus cap. ut 12 ad 4 ſic 72 ad 24. At per theſim, per fab. & 3 verſ. hujus cap. facti á 2 per 12 & á 6 per 12 ſunt 24 & 72. Ergo per 5 verſ. hujus cap. ut 72 eſt ad 24 ſic 6 eſt ad 2. Ergo ex præmiſſis, ut 12 ad 4 ſic 6 eſt ad 2. *Itaque*

10. Si numerus eſt factus á duobus datis, ejus diviſor & quotus erunt medii datis proportionales.

Patet hoc per 1 verſ. hujus cap. *Et*

11. Si é tribus numeris datis primus multiplicet tertium, & ſecundus dividat factum, ut primus eſt ad ſecundum ſic quotus erit ad tertium.

Patet etiam hoc per 1 verſ. hujus cap. *Et*

12. Si partes inter ſe æquales ſint, eorum quoque termini proportionales erunt.

Patet

Patet hoc per 5 verſ. 4 cap.

13. *Si dati numeri minores proportionales non habeant, majores ipſis proportionales per eundem multitudinis integrum metientur.*

Hæc proprietas etſi é ſola diviſione ſumitur, tamen quia abſque proximo verſiculo demonſtrari non potuit, eam non temeré huc diſtuli. Dati numeri qui minores proportionales non habeant ſunto 3, 7 & 9, majores autem ipſis proportionales ſunto 12, 28 & 36. Primúm dico 3, 7 & 9 eſſe menſuras ipſis proportionalium 12, 28, & 36. Secus quoti é 12 per 3, é 28 per 7, & é 36 per 9, ſunto $3\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{7}$ & $3\frac{6}{9}$. Hîc per theſim quoti $3\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{7}$ & $3\frac{6}{9}$ æquantur: nam ex theſi, 3, 7 & 9 majoribus 12, 28 & 36 proportionales ſunt. Ergo etiam in in $3\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{7}$, & $3\frac{6}{9}$, integri 3, 3, & 3 æquantur: ideoque æqualium ſubductione ab æqualibus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ & $\frac{6}{9}$ inter ſe etiã æquantur: ideoque per 12 verſ. hujus cap. ut 2 ad 3 ſic 4 ad 7 & ſic 6 ad 9. Sed in $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, & $\frac{6}{9}$, 2, 4 & 6 ſunt minores quám 3, 7 & 9 per ſcholium 6 verſ. 5 cap. ergo 3, 7 & 9 minores habebũt proportionales, quod erit contra theſim. quare 3, 7 & 9 majores ipſis proportionales metientur: neque id tantúm, ſed & per eundem integrum multitudinis eos metientur; patet hoc tum ex jam concluſo, tum ex theſi.

14. *Si quatuor proportionales totidem proportionales multiplicent, facti quoque inter ſe proportionales erunt.*

Pulcherrima propoſitio & quæ poſtea ad proportionum multiplicationem adhibebitur: ut 3 ad 5 ſic 15 eſto ad 25, & ut 6 ad 12 ſic 7 eſto ad 14. Item facti á 3 per 6 & á 5 per 12 ſunto 18 & 60: & ſimiliter facti á 15 per 7 & á 25 per 14 ſunto 105 & 350. Dico ut 18 eſt ad 60 ſic 105 eſſe ad 350. Etenim quotus é 12 per 6 eſto 2: tumque facti á 2 per 5 & per 25 ſunto 10 & 50.

ut patuit) ad factum á 6 per 4. Ergo á primo ad ultimum ut 72 ad factum á 12 per 2, ſic 72 ad factum á 6 per 4. ergo per 16 verſ. 5 cap. facti á 12 per 2 & á 6 per 4 inter ſe æquantur. *Itaque*

7. *Si é tribus numeris datis ſecundus tertium multiplicet, & primus ab iis factum dividat, quotus erit tribus datis quartus proportionalis.*

Patet hoc per 1 verſ. hujus capitis. *Et*

8. *Si termini partium ſint proportionales, partes inter ſe æquabuntur.*

Patet hoc per 5 verſ. hujus cap.

9. *Si factus á duobus mediis æquatur facto ab extremis, quatuor dati erunt proportionales.*

Hæc regulæ aureæ converſa eſt. Quatuor dati ſunto 12, 4, 6 & 2. tumque facti a 12 per 2 & a 6 per 4 æquentur, dico ut 12 eſt ad 4 ſic 6 eſſe ad 2. Etenim facti a 12 per 6 & á 4 per 6 ſunto 72 & 24. Hic per 5 verſ. hujus cap. ut 12 ad 4 ſic 72 ad 24 At per theſim, per fab. & 3 verſ. hujus cap. facti á 2 per 12 & á 6 per 12 ſunt 24 & 72. Ergo per 5 verſ. hujus cap. ut 72 eſt ad 24 ſic 6 eſt ad 2. Ergo ex præmiſſis, ut 12 ad 4 ſic 6 eſt ad 2. *Itaque*

10. *Si numerus eſt factus á duobus datis, ejus diviſor & quotus erunt medii datis proportionales.*

Patet hoc per 1 verſ. hujus cap. *Et*

11. *Si é tribus numeris datis primus multiplicet tertium, & ſecundus dividat factum, ut primus eſt ad ſecundum ſic quotus erit ad tertium.*

Patet etiam hoc per 1 verſ. huius cap. *Et*

12. *Si partes inter ſe æquales ſint, eorum quoque termini proportionales erunt.*

Patet

Patet hoc per 5 verſ. 4 cap.

13. *Si dati numeri minores proportionales non habeant, majores ipſis proportionales per eundem multitudinis integrum metientur.*

Hæc proprietas etſi é ſola diviſione ſumitur, tamen quia abſque proximo verſiculo demonſtrari non potuit, eam non temeré huc diſtuli. Dati numeri qui minores proportionales non habeant ſunto 3, 7 & 9, majores autem ipſis proportionales ſunto 12, 28 & 36. Primúm dico 3, 7 & 9 eſſe menſuras ipſis proportionalium 12, 28, & 36. Secus quoti é 12 per 3, é 28 per 7, & é 36 per 9, ſunto $3\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{7}$ & $3\frac{6}{9}$. Hic per theſim quoti $3\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{7}$ & $3\frac{6}{9}$ æquantur: nam ex theſi, 3, 7 & 9 majoribus 12, 28 & 36 proportionales ſunt. Ergo etiam in in $3\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{7}$, & $3\frac{6}{9}$, integri 3, 3, & 3 æquantur: ideoque æqualium ſubductione ab æqualibus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ & $\frac{6}{9}$ inter ſe etiã æquantur: ideoque per 12 verſ. hujus cap. ut 2 ad 3 ſic 4 ad 7 & ſic 6 ad 9. Sed in $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, & $\frac{6}{9}$, 2, 4 & 6 ſunt minores quám 3, 7 & 9 per ſcholium 6 verſ. 5 cap. ergo 3, 7 & 9 minores habebũt proportionales, quod erit contra theſim. quare 3, 7 & 9 majores ipſis proportionales metientur: neque id tantúm, ſed & per eundem integrum multitudinis eos metientur; patet hoc tum ex jam concluſo, tum ex theſi.

14. *Si quatuor proportionales totidem proportionales multiplicent, facti quoque inter ſe proportionales erunt.*

Pulcherrima propoſitio & quæ poſtea ad proportionum multiplicationem adhibebitur: ut 3 ad 5 ſic 15 eſto ad 25, & ut 6 ad 12 ſic 7 eſto ad 14. Item facti á 3 per 6 & á 5 per 12 ſunto 18 & 60: & ſimiliter facti á 15 per 7 & á 25 per 14 ſunto 105 & 350. Dico ut 18 eſt ad 60 ſic 105 eſſe ad 350. Etenim quotus é 12 per 6 eſto 2: tumque facti á 2 per 5 & per 25 ſunto 10 & 50.

		10		50
	3	5	15	25
2)	6	12	7	14
	18	60	105	350

Hic primúm ex theſi ut 3 eſt ad 5 ſic 15 eſt ad 25, & alterné ut 3 ad 15 ſic 5 eſt ad 25. At per fab. & per 5 verſ. hujus capitis ut 5 eſt ad 25 ſic 10 eſt ad 50. ergo ut 3 ad 15 ſic 10 eſt ad 50, & alterné ut 3 ad 10 ſic 15 eſt ad 50. Secundó ut 6 ad 12 hoc eſt ex theſi ut 7 ad 14 ſic per fabricam & per 3 verſ. hujus capitis 25 eſt ad 50. factus autem á 14 per 25 eſt 350 per theſim. ergo per 6 verſ. hujus cap. factus a 7 per 50 erit 350. factus autem a 7 per 15 eſt 105 per theſim: quare ex jam concluſo & per 5 verſ. hujus cap. ut 15 ad 50 ſic 105 ad 350. Tertió ut 6 ad 12 ſic per fab. & per 3 verſ. hujus capitis 5 eſt ad 10. ergo per theſim factus á 10 per 6 erit 60. Sed per eandem factus á 3 per 6 eſt 18. ergo per 5 verſ. hujus cap. ut 18 ad 60 ſic 3 eſt ad 10, & ex primo concluſo ſic 15 eſt ad 50, & ex ſecundo concluſo ſic 105 eſt ad 350. ergo á primo ad ultimum ut 18 ad 60 ſic 105 eſt ad 350.

De ſecunda numerationis diviſione, & de verorum integrorum additione & ſubductione. Cap. VII.

1. NUmeratio æquata & proportionata adhuc dicta eſt: ſequitur numerationis altera diſtinctio. Numeratio eſt ſimplex aut miſta.

Numeratio & æquata & proportionata ſimplex aut miſta eſt, contraque numeratio & ſimplex & miſta æquata aut proportionata eſt: meritó igitur generalem numerationis diſtinctionem duplicem facimus: ſic enim tota numerationis doctrina verius & clariús perſpicitur.

2. Sim-

2. Simplex numeratio eſt in qua dati numerandi primarii ejuſdem generis numeri ſunt: eſtque verorum integrorum aut verarum partium. Verorum integrorum ſimplex numeratio eſt, quando dati numerandi ſunt veri integri tantúm.

3. Additio verorum integrorum rectam ſub addendis ducit: tumq; ductæ rectæ additorum ſummam ſubſcribit.

Ut in hoc exemplo:

7	5	3
1	4	3

Hîc per 5 verſ. 3 cap. á dextra incipiens 3 ad 3 addo, ſumma eſt 6: quare in primo gradu ſubſcribo 6. deinde 4 & 5 ſunt 9, quare in ſecundo gradu ſubſcribo 9. item 1 & 7 ſunt 8, quare in tertio gradu ſubſcribo 8. totum exemplum ſic eſt:

7	5	3
1	4	3
8	9	6

In hoc exemplo ſummam ſingulorum graduum unica nota ſemper comprehendimus: ſi ea duabus notis comprehendatur, tum ſuperioris gradus notam cũ proximis numerandam per 4 verſ. 3 cap. mẽte reſervabimus. Addendi ſunt 790, 889, 952, & 9843. primúm numeros iſtos ſic ſcribo:

	7	9	0
	8	8	9
	9	5	2
9	8	4	3

Deinde ſumma é 3, 2, 9 & 0 eſt 14, quare ſcribo 4 & mente teneo 1. itẽ ſumma ex 1, 4, 5, 8 & 9 eſt 27, quare ſcribo 7, &

teneo 2. item ſumma é 2, 8, 9, 8 & 7 eſt 34, quare ſcribo 4 & teneo 3. Denique ſumma é 3 & 9 eſt 12, quare ſcribo 12.

790
889
952
9843

12474

Anni á creato mundo ad diluuium uſq; numerantur 1656, á diluvio ad Moſem 797, á Moſe ad Chriſtum 1514, á Chriſto in hunc diem 1579. Numerus annorum á creato mundo in hunc diem quæritur. Reſpondeo ſummam propoſitorum annorum eſſe 5546. Ergo ex iis quæ propoſita ſunt á creato mundo in hunc diem elapſi ſunt anni 5546.

1656
797
1514
1579

5546

4. Subductio verorum integrorum, ſubducendum ei á quo ſubductio fit ſubjicit, túmque reliquum expunctis numeratis ſuperſcribit.

Subducendi ſunt 345 é 468. Primúm datos numerandos ſcribo ſic:

468
345

Tumque per 8 verſ. 3 cap. á læva incipiens tollo 3 é 4 manet 1, quare expunctis 3 & 4 ſuperſcribo 1. Deinde tollo 4 é 6 manent 2, quare expunctis 4 & 6 ſuperſcribo 2. item tollo 5 ex 8 manent 3, quare expunctis 8 & 5 ſuperſcribo 3. exemplum ſic eſt:

123

1 2 3
4 6 8
3 4 5

Hîc nota ſubducenda nunquam ſuperiore unde ſubducebatur major fuit: ſi major ſit, tunc ſuperior nota unitate præcedentis augebitur. Itaque hîc é numerato jam proximo gradu unitatem per 4 verſ. 3 cap. mente retinebimus. E 6 7-0 0 0 3 9 ſubducti ſunt 5 9 0 0 0 8 4, reliquus numerus dicendus eſt. Primùm datos numerandos ſic ſcribo:

6 7 0 0 0 3 9
5 9 0 0 0 8 4

Deinde tollo 5 é 6 manet 1, ſed 9 non poſſunt tolli é 7, ergo expunctis 6 & 5 teneo 1. Jam tollo 9 é 17 manent 8, ſed deinde 8 é 3 tolli non poſſunt, ergo expunctis 7 & 9 ſuperſcribo 7 & teneo 1. item tollo 0 é 10, 0 é 10, 0 é 10, relinquuntur 10, 10, 10, ſed ob prædictam jam cauſam expunctis circulis ſuperſcribo 9, 9, 9, & teneo 1: tumque tollo 8 é 13 manent 5, quem reliquum expunctis 8 & 3 ſuperſcribo. Denique é 9 tollo 4, reliquum 5 expunctis 4 & 9 ſimiliter ſuperſcribo: ſubductionis exemplum ſic eſt:

7 9 9 9 5 5
6 7 0 0 0 3 9
5 9 0 0 0 8 4

Si plures termini fuerint vel ſubducendi, vel ejus á quo ſubductio fit, reducendi ſunt prius additione in unam ſummam. ut ſi velis ſubducere 465 & 234 é 905, addes priús 465 & 234. ſumma ex additis eſt 699, quæ ſublata é 905 relinquit 206.

De multiplicatione verorum integrorum. Cap. VIII.

1. MUltiplicatio verorum integrorum rectam ſub multi-

plicandis ducit, tumque á datis factos datæ rectæ ſubſcribit. Hic ſingulæ multiplicantis notæ, omnes multiplicandi notas multiplicant.

Multiplicandi ſunt 873 per 58. Primùm datos numeros ſic ſcribo:

8 7 3
5 8

Tum veró à dextra incipio per 2 verſ. 4 cap. & multiplicans 873 per 8 & per 5 facio 6984 & 4365. quorum ſumma eſt 50634. exemplum ſic eſt:

8 7 3
5 8

6 9 8 4
4 3 6 5

5 0 6 3 4

Si poſtremæ multiplicatorum notæ ſint circuli, tunc brevitatis cauſa neglectis circulis multiplicatio fiet: ſed deniq; circuli omiſſi ad ſummam é factis adjicientur. Multiplicãdi ſunt 78000 per 650. Primũ neglectis circulis numerãdos ſcribo ſic:

7 8
6 5

Tumq; multiplicans 78 per 5 & per 6 facio 390 & 468, quorum ſumma eſt 5070: huic deniq; omiſſos circulos quatuor adjicio, exemplum ſic eſt:

7 8
6 5

3 9 0
4 6 8

5 0 7 0 0 0 0

Multi-

Multiplicationis in ludo, tum anuli, tum trium occultorũ uſus ſingularis & facilis eſt. Ludum utrumq; hic breviter deſcribam. Anuli ludus cum multiplicatione additionem conjunctam habet. Plures convivæ ſunt in eadem menſa, é quibus unus aliquis anulum in manu, quodam digiti articulo geſtat: conviva ille, manus, digitus & articulus dicendi ſunt. Ejus cauſa rogo convivam qui hæc ſciat, ut juſſus perſonas digitos & articulos tacité numerare, in numerandis perſonis á ſe verſus partem quam dixero ad anulatam perſonam progrediatur, ibique conſiſtat: in numerandis autem deinde ordine tum digitis tum articulis pollicem dextræ quidem primum, ſiniſtræ autem poſtremum, articulum veró ungui proximum primum faciat. His ita conceſſis jubeo vt perſonas numeret, perſonarum numerum per 10 multiplicet, & facto digiti numerum addat: item ſummam hanc rurſum per 10 multiplicet, & facto articuli numerum addat: denique jubeo ut poſtremam hanc ſummam proferat. Ea igitur prolata exempli cauſa eſto 10073. Hujus ſummæ poſtrema nota digiti articulum, penultima manum & digitum, cæteræ anulatam perſonam ſignificant. Itaque in propoſita ſpecie anulata perſona centeſima fuerit, & anulum in lævæ medico, tertio articulo habuerit. Si penultima nota circulus fuerit, tunc quia circulus per ſe nihil ſignificat, mutuanda erit unitas é proximo ſuperiore gradu. Itaque ſi prolata ſumma fuerit 2601, anulata perſona erit vigeſima quinta, & anulum in lævæ pollice articulo primó habuerit.

Ludus trium occultarum rerum cum multiplicatione ſubductionem conjunctam habet. Tres ſunt in eadem menſa convivæ, ibidemque a, b, c, id eſt anulus, bulla & cyathus ſunt: ſunt & calculi 24, é quibus unum primo, ſecundo duos, tertio tres do, ea lege ut me abſente quilibet illorum é tribus propoſitis rebus a, b, c, unam aliquam abſcondat, & é reliquis 18 calculis qui

anulum abſconderit is ſimplum, qui bullam duplum, qui cyathum is triplum accipiat ejus quod ei dederim: quod deinde calculorum reliquum fuerit, illud in menſa maneat. Sic occulta palám faciam: reliqui enim calculi erunt vel 1, vel 2, vel 3, vel 5, vel 6, vel 7. Si reliquus fuerit 1, primus abſconderit a, ſecundus b, tertius c. Si 2 reliqui ſint, primus abſconderit b, ſecundus a, tertius c. cæteros ex ſubjecta tabella cognoſces.

Reſiduum,	*Perſonæ,*	*Res.*	*Reſiduum,*	*Perſonæ,*	*Res.*
	1	a		1	b
1	2	b	5	2	c
	3	c		3	a
	1	b		1	c
2	2	a	6	2	a
	3	c		3	b
	1	a		1	c
3	2	c	7	2	b
	3	b		3	a

Ficta artis vocabula quæ hanc tabellam ſtatim menti repræſentant, ſunt abec, bac, aceb, ccc, beca, cab, ceba. Hic primùm numerus vocum reliquos calculos ſignificat: deinde litera e ſemper omittitur, & ſic in ſingulis vocibus literarum numerus perſonas, ipſæ literæ res occultas ſignificant.

De di-

De diviſione verorum integrorum. Cap. IX.

1. *Diviſio verorum integrorum, dividendum inter diviſorem & quotum ſcribit: diviſorem ad lævam ponit, quotum autem ſubductione diviſoris á dividendo quoties poteſt invenit. Hic ſingulæ notæ á dividendo æqualiter ſubducuntur.*

Quod dicitur quotum ſubductione inveniri, ita accipiendum eſt, ſi diviſor á dividendo ſubduci queat: ſi nequeat, quoti inventionem é 3 verſ. 5 cap. repete. Dividendi ſunt 724 per 362. Primum dividendum & diviſorem ſcribo ſic:

3 6 2) 7 2 4

Deinde per 1 verſ. 5 cap. à dextra incipiens tollo 3 é 7 bis & manet 1, item tollo 6 é 12 bis & nihil manet, ſimiliter tollo 2 é 4 bis & nihil relinquo: quare quotus é 724 diviſo per 362 erit 2.

3 6 2) 7 2 4 (2

Integrorum diviſio ſupra cæteras ipſorum numerationes memoriam maxime exercet: ideoque qui parum ſuæ memoriæ fidunt (& certe hic plerique parum fidunt) factam animo diviſionem quoti multiplicatione per diviſorem factaq; ſubductione á dividendo ſtatim examinant, ut in hoc exemplo vides:

3 6 2) ~~7~~ ~~2~~ ~~4~~ (2
~~7~~ ~~2~~ ~~4~~

Si prima diviſoris nota, prima dividendi major ſit, eam é duabus prioribus dividendi notis tollimus. Dividendi ſunt 768 per 96. hic 9 major eſt quám 7, ergo 9 non é 7 ſed é 76 tollimus. exemplum ſic eſt:

9 6) ~~7~~ ~~6~~ ~~8~~ (8
~~7~~ ~~6~~ ~~8~~

Si quotus pluribus notis ſcribendus ſit, tunc peractis prio-

ribus diviſionibus proximam ſequentem dividendi notam ita expungimus, ut eam denuò ſuperiore loco eodem gradu ſcribamus. Exempla in quibus diviſor dividendi pars eſt. Dividendi ſunt 1008 per 28. diviſio ſic eſt:

```
        1 6 8
28)   1 0 0 8   (36
        8 4
        1 6 8
```

Dividendi ſunt 42082 per 53. diviſio ſic eſt:

```
           2 1 2
         4 0 8
53)    4 2 0 8 2    (794
       3 7 1
         4 7 7
           2 1 2
```

Exempla in quibus diviſor eſt dividendi partes. Partiendi ſunt 873 aurei ſociis 382. diviſio ſic eſt:

```
        1 0 9
382)    8 7 3    (2 109/382
        7 6 4
```

Hęc diviſio ſignificat ſingulorum partem eſſe aureos duos & præterea $\frac{109}{382}$ unius aurei. Dividendæ ſunt libellæ 43165 militibus 76. Diviſio ſic eſt:

```
            7 3
          6 0 5
        5 1 6
76)   4 3 1 6 5    (567 73/76
      3 8 0
        4 5 6
          5 3 2
```

Hæc diviſio ſignificat ſingulorum partem eſſe 567 libellas & præterea $\frac{73}{76}$ unius libellæ. Si prima diviſoris nota unitas, cæteræ autem circuli ſint, tunc quot circuli fuerint in diviſore, tot

re, tot detractis è dividendo ab ultima notis diviſio fit. Si diviſor dividendi pars ſit, diviſio ſic eſt:

100) 685000 (6850

Si diviſor ſit dividendi partes, diviſio ſic eſt:

1000) 5000693 (5000 $\frac{693}{1000}$

De proprietatibus verorum integrorum quæ colligi ex ipſorum numeratione poſſunt, & præſertim de numero pari & impari. Cap. X.

1. EXplicata verorum integrorum numeratione, ſequitur ut eorum proprietates quæ inde haberi poſſunt, ſimiliter explicemus.

2. Eæ partim in numeris per ſe, partim in numeris inter ſe conſiderantur. In numeris per ſe duas diſtinctiones habemus. Prima eſt. numerus eſt par aut impar. Par eſt quem binarius metitur.

Sic 2, 4, 6, & cæteri quos binarius metitur, pares numeri ſunt. *Itaque*

3. Summa ex additis paribus erit par.

Si binarius additos numeros metiatur, metietur quoq; eorum ſummam per 11 verſ. 5 cap. *Et*

4. Sublato pari è majore pari reliquus erit par.

Si binarius datum numerum & ejus partem alteram metiatur, reliquam quoque metietur per 12 verſ. 5 cap. *Et*

5. Factus à quovis integro per parem erit par.

Si binarius facti numeri menſuram metiatur, & ipſum factum metietur per 13 verſ. 5 cap. *Et*

6. Si par metiatur datum, datus erit par.

Cauſa proximæ ſuperiori eadem eſt.

7. Par eſt pariter par aut impariter par. Pariter par eſt cujus quævis multitudinis menſura par eſt.

Sic 2, 4, 8, 16, 32, pariter pares ſunt.

8. *Impariter par eſt, cujus multitudinis menſura modó par modó impar eſt.*

Sic 6, 10, 12, 14, impariter pares ſunt.

9. *Impar eſt numerus quem binarius metiri nequit.*

Sic 1, 3, 5, 7, 9, impares ſunt.

10. *Differentia paris á proximo impari eſt unitas.*

Patet hoc in infinita numerorum ſerie ab unitate. *Itaque*

11. *Summa é pari & impari erit impar.*

Si eſſet par, differentia paris á proximo impari non eſſet unitas. *Et*

12. *Summa ex imparium multitudine pari vel impari erit par vel impar.*

Sublatis unitatibus ab imparibus reliqui ſunt pares, per 10 verſ. hujus cap. Itaq; ſumma illic par erit per 3 verſ. hujus cap. hic impar per 11 ejuſdem.

13. *Sublato pari ex impari, vel contrá, reliquus erit impar.*

Sublato pari ex impari ſi reliquus eſſet par, ſumma é reliquo & ſublato eſſet par per 3 verſ. hujus cap. quod eſſet contra theſim. item ſublato impari é pari ſi reliquus eſſet par, ſumma e pari & impari eſſet impar per 11 verſ. hujus capitis, quod etiam eſſet contra theſim.

14. *Si datus numerus ſit factus ab impari per imparem, erit impar.*

Si binarius datum metiatur, datus erit factus á pari per 2 verſ. 6 cap. At ex theſi datus eſt factus ab impari per imparē.

15 *Imparis menſuræ omnes ſunt impares.*

Si qua earum eſſet par, binarius eam metiens imparem quoque metiretur, quod eſſet contra 9. verſ. hujus capitis.

16. Si

16. Si impar metiatur parem, paris & quotum parem dabit, & dimidium metietur.

Prima pars patet: nam ſi quotus é pari diviſo per imparem eſſet impar, & dividuus quoque impar eſſet per 14 verſ. hujus cap. At hoc eſſet contra theſim. Secunda etiam pars patet, quia inventi quoti dimidium per ipſum imparem multiplicatum faciet paris diviſi dimidium per 5 verſ. 6 cap. Atq; hæc de prima numerorum per ſe diſtinctione: antequam ad alteram veniam, ludum divinandi numeri libet hìc deſcribere: is enim é paris & imparis diſtinctione præcipué ſumitur.

Cogita numerum eúmque tripla, & triplato ſi impar ſit adde unitatem: & triplatum jam parem dimidia, & dimidiatum tripla, & huic triplato ſi impar ſit adde quoque unitatem, & hunc triplatum jam parem etiam dimidia. Hìc quęro quoties novenarius in ſecundi triplati dimidio haberi poſſit? Si novenarium dixeris ſecundi triplati dimidio majorem eſſe, aut alter tantum triplatorum par, aut uterque impar fuerit. Si triplatorum alter tantum par fuerit, ſiquidem triplatus primus impar fuerit, cogitatus numerus erit unitas.

1, 3+1, 2, 6, 3.

Si ſecundus triplatus impar fuerit, cogitatus numerus erit 2.

2, 6, 3, 9+1, 5.

Si uterque triplatorum impar fuerit, cogitatus numerus erit 3.

3, 9+1, 5, 15+1, 8.

Si novenarium in ſecundi triplati dimidio aliquoties haberi poſſe dextris, ſiquidem uterq; triplatorum par fuerit, factus à quaternario per dictum quotum erit cogitatus numerus. Novenarius in ſecundi triplati dimidio eſto ſemel. Hìc igitur cogitatus numerus erit 4.

4	12	6	18	9
1	1	1	1	1

Si triplatus alter tantúm par fuerit, tunc ſiquidem primus impar fuerit, factus á quaternario per dictum quotum auctus unitate erit cogitatus numerus. Novenarius in ſecundi triplati dimidio eſto bis. Hîc igitur cogitatus numerus erit 9.

4	12	6	18	9
—+—1	—+—3+1	—+ 2	—+—6	—+—3
2	2	2	2	2

Si ſecundus triplatus impar fuerit, factus á quaternario per dictum quotum auctus binario erit cogitatus numerus. Novenarius in ſecundi triplati dimidio eſto ter. Hic igitur cogitatus numerus erit 14.

4	12	6	18	9
—+—2	—+—6	—+3+1	—+12	—+6
3	3	3	3	3

Si triplatus uterque impar fuerit, factus á quaternario per dictum quotum auctus ternario erit cogitatus numerus. Novenarius in ſecundi triplati dimidio eſto quater. Hic igitur cogitatus numerus erit 19.

4	12	6	18	9
—+—3	—+—9+1	—+—5	—+—15+1	—+8
4	4	4	4	4

Ergo in hoc ludo ſive novenarius ſecundi triplati dimidio major ſit, ſive in eo aliquoties habeatur, arithmeticus divinator diligenter meminerit, qui triplati pares, quive impares fuerint. Sic cum voluptate aliqua pueri memoria liberaliter & honeſté exercebitur, ut tandem liberales artes amare incipiat.

De primis & compoſitis tum per ſe tum inter ſe. Cap. XI.

1. SEquitur altera distinctio numerorum per ſe. Numerus eſt primus aut compoſitus. Primus eſt cujus maxima

menſura

menſura alia á ſe multitudinis numerus non eſt.

Sic 1, 2, 3, 5, 7, 11, numeri primi ſunt. *Itaque*

2. *Numerus primus menſuras duabus plures non habet.*

Unitas menſuram aliam à ſe nullam habet. At primus multitudinis numerus præter ſe ipſum unitatem quoq; ſui menſuram habet.

3. *Numerus compoſitus eſt cujus maxima menſura alia á ſe eſt numerus multitudinis.*

Sic 4, 6, 8, 9, 15, 21, compoſiti numeri ſunt.

4. *Si numerus eſt compoſitus, eum primus aliquis multitudinis metietur.*

Numerus compoſitus eſto 36, primus inquam, aliquis multitudinis numerus eum metietur. Etenim compoſiti 36 metire menſuram multitudinis, & deinceps quoties poteris mēſuræ menſuram multitudinis per alium multitudinis numerum. Hic quia datus numerus compoſitus eſt ex theſi, neque ejus unitates infinitæ ſunt per 6 verſ. 2 cap. ideo ultimus tandem multitudinis quotus primus futurus eſt per 4 verſ. hujus cap. iſque metietur menſuram aliquam dati 36, ipſum quoque 36 metietur per 13 verſ. 5 cap.

5. *Huc uſque numeros per ſe expoſuimus: ſequuntur numeri inter ſe, qui ſunt primi inter ſe, aut compoſiti inter ſe. Primi inter ſe ſunt, quorum maxima communis menſura eſt unitas*

Sic 5 & 4, 10 & 21 ſunt primi inter ſe. *Itaque*

6. *Numeri primi inter ſe nullam multitudinis menſuram communem habent.*

Secus multitudinis numerus unitate minor eſſet contra 5 verſ. 1 cap.

7. *Compoſiti inter ſe ſunt, quorum maxima communis menſura eſt multitudinis numerus.*

Sic 3 & 3, 5 & 15, 4 & 6, ſunt compoſiti inter ſe.

8. *Compoſiti inter ſe primum aliquem multitudinis numerum communem menſuram habent.*

Si eorum maxima communis menſura primus multitudinis ſit, res per ſe nota eſt: ſin ea compoſitus numerus ſit, tum eam primus aliquis multitudinis numerus metiri poteſt per 4 verſ. hujus cap. quare hujuſmodi primus metietur compoſitos inter ſe per 13 verſ. 5 cap.

De proprietatibus numerorum inter ſe. Cap. XII.

1. *SI dati numeri ſint primi inter ſe, non habebunt alios minores ipſis proportionales.*

Sunto primi inter ſe 4, 6, & 9. dico eos non habere proportionales ipſis minores. Secus ex contradicentis propoſito minimi ipſis proportionales ſunto 2, 3, 8. hic 2, 3, & 8 metientur 4, 6, & 9 per eundem integrum multitudinis, ut patet per 13 verſ. 6 cap. Quare 4, 6, & 9 primi inter ſe ex theſi, habebunt communem menſuram multitudinis per 9 verſ. 5 cap. At hoc eſt contra 6 verſ. 11 cap. *Itaque*

2. *Si dati alios habeant minores ipſis proportionales, erunt compoſiti inter ſe.*

Nam niſi ſint primi inter ſe, erunt compoſiti inter ſe per 5 verſ. 11 cap.

3. *Si dati ſint compoſiti inter ſe, habebunt alios minores ipſis proportionales.*

Patet hoc per 1 verſ. hujus cap. propria enim contrariorum conſequentia contraria ſunt. *Itaque*

4. Si

4. Si dati numeri alios ipſis minores proportionales non habeant, erunt primi inter ſe.

Nam niſi dati ſint compoſiti inter ſe, erunt primi inter ſe per 5 verſ. 11 cap.

5. Si duo numeri ſint primi inter ſe, factus ab iis erit minimus ab ipſis dividuus.

Sunto primi inter ſe 3 & 5, factuſque ab iis eſto 15. dico 15 eſſe minimum dividuum á datis 3 & 5. Secus dividuus á datis 3 & 5 minor quam 15 eſto 14, tumque quoti é 14 per 3 & 5 ſunto 4 & 2. hîc per 9 verſ. 6 cap. ut 3 ad 5 ſic 2 eſt ad 4. Sed ex contradicentis propoſito factus á 3 per 4 minor eſt quám factus á 3 per 5. ergo per 5 verſ. 6 cap. 4 erit minor quàm 5, & ob eandem cauſam 2 quoque minor erit quam 3. ergo per 2 verſ. hujus cap. 3 & 5 erunt compoſiti inter ſe. At hoc eſt contra theſim.

6. Si numerus datos metiatur per primos inter ſe, erit maxima communis menſura datorum.

Faciamus 6 metiri 24, 54 & 72 per primos inter ſe 4, 9 & 12. Dico 6 eſſe maximam communem menſuram datorum 24, 54 & 72. Secus communis eorum menſura major quàm 6 eſto 7. tumque 7 metiatur 24, 54, & 72 per 3, 8 & 10. Hîc facti á 6 per 4 & á 7 per 3 æquabuntur per theſim & per 1 verſ. 6 cap. & ob eaſdem cauſas facti á 6 per 9, & á 7 per 8, itemque facti á 6 per 12 & á 7 per 10 inter ſe etiam æquabuntur. ergo per 9 verſ. 6 cap. ut 7 ad 6 ſic 4 ad 3, & ſic 9 ad 8, & ſic 12 ad 10. ſed ex contradicentis propoſito 6 minor eſt quám 7. ergo 3, 8 & 10 minores erunt quàm 4, 9 & 12. ideoque 4, 9 & 12 erunt compoſiti inter ſe per 2 verſ. hujus cap. At hoc eſt contra theſim.

7. Si numerus metiens datos eſt maxima ipſorum communis menſura, quoti erunt primi inter ſe.

Dati numeri ſunto 12, 28 & 44, eorumque maxima communis menſura eſto 4. item 4 metiatur 12, 28 & 44 per 3, 7 & 11. dico 3, 7 & 11 eſſe primos inter ſe. Secus ex contradicentis propoſito & per 3 verſ. hujus cap. minimi datis 3, 7 & 11 proportionales ſunto 2, 5 & 10. Hic per theſim & per 9 verſ. 5 cap. ut 12 ad 3 ſic 28 eſt ad 7, & ſic 44 ad 11. quare 12, 28 & 44 quotis 3, 7 & 11, hoc eſt ex contradicentis propoſito minimis 2, 5 & 10 proportionales erunt. Item ex ipſo contradicente & per 13 verſ. 6 cap. 2 5 & 10 metientur 12, 28 & 44 per eundem multitudinis numerum. Numerus porro metiens 12, 28 & 44 per 2, 5 & 10, erit iſ ſorum 12, 28 & 44 maxima communis menſura per 6 verſ. hujus cap. At ex hyp. 4 eſt maxima communis menſura datorum 12, 28 & 44. Ergo per 9 verſ. 5 cap. idem numerus nempe 4 metietur 12 per 3, & per 2, idem numerus nempe 4 metietur 28 per 7 & per 6, idem numerus 4 metietur 44, per 11 & per 10. At hæc ſunt contra 7 verſ. 5 cap.

8. *Si primus multitudinis numerus non metiatur datum, erit ad eum primus.*

Datus eſto 8, & primus eum non metiens eſto 3. dico 3 & 8 eſſe primos inter ſe. Secus per 5 & 8 verſ. 11 cap. dati 3 & 8 habebunt communem multitudinis menſuram, eam que diverſam ab ipſis ex contradicentis propoſito, & ſic primus numerus 3 habebit multitudinis menſuram aliam a ſe, quod eſt contra 1 verſ. 11 cap.

9. *Si primus multitudinis numerus factum a duobus datis metiatur, alterum ſaltem datorum metietur.*

Erit igitur ſaltem ad alterum datorum compoſitus per 7 verſ. 11 cap. Saltem inquam: interdum enim ad utrumq; compoſitus eſt, ut patet in 54 facto à 6 per 9. Hic enim primus 3 metiens 54, metitur quoque 6 & 9. Sed ad propoſitum. Dati numeri 4 & 6 faciant 24, eumq; primus 3 metiatur 24 per 8,

idem-

idemq; 3 non metiatur 4. Hîc inquam 3 metietur 6. Primus enim 3 non metiens 4 ex theſi erit primus ad eum per 8 verſ. hujus cap. Prætereà cùm 3 metiatur 24 per 8 ex theſi, factus á 3 per 8 erit 24 per 2 verſ. 6 cap. Sed ex theſi factus á 4 per 6 eſt etiam 24. ergo per 8 verſ. 6 cap. ut 3 ad 4 ſic 6 eſt ad 8. At 3 & 4 primi inter ſe (ut patuit) ſunt minimi per 1 verſ. hujus cap. ergo per 13 verſ. 6 cap. 4 & 3 metientur 8 & 6 per eundem integrum multitudinis: & ſic 3 metietur 6, quod erat demonſtrandum. Inventio omnium menſurarum dati numeri compoſiti ex hoc verſiculo ſequenti capite demonſtrabitur.

De inventione omnium menſurarum dati numeri compoſiti. Cap. XIII.

1. *Inventio omnium menſurarum dati numeri compoſiti duas partes habet. Prima ſic eſt:*

2. *Si primi multitudinis numeri à minimo continuè metiantur & datum & dati quotum, & quoti deinceps quotum quoties fieri poterit, hujuſmodi menſores cum ultimo quoto & unitate erunt omnes primi metientes datum.*

Inveniendi ſunt omnes primi metientes compoſitū 5040. Primùm igitur ex omnibus primis multitudinis metientibus datum minimus eſt 2, & quotus é 5040 per 2 eſt 2520, quem 2 metitur per 1260, quem 2 metitur per 630, quem 2 metitur per 315. Item ex omnibus primis metientibus 315 minimus eſt 3, & quotus é 315 per 3 eſt 105, quem 3 metitur per 35. Denique ex omnibus primis metientibus 35 minimus eſt 5, & quotus é 35 per 5 eſt 7, qui quotus quia à nullo alio multitudinis numero dividitur eſt, ultimus eſt.

	5040
2	2520
2	1260
2	630
2	315
3	105
3	35
5	7

Hîc dico 1, 2, 3, 5 & 7 eſſe menſuras dati 5040. Primúm enim 1 metietur datum 5040 per 2 & 8 verſ. 5 cap. Deinde 2 metitur 5040 per theſim. item 3, 5 & 7 eum quoque metiuntur per fabricam & per 13 verſ. 5 cap. quare 1, 2, 3, 5 & 7 metiuntur datum 5040. Prætereà dico etiam non poſſe dati primos qui datum 5040 metiantur præter 1, 2, 3, 5 & 7. Sed primus aliquis ab iis diverſus, puta 11 metiatur datum 5040. Hic 11 metietur 2 aut 2520 per fab. & per 9 verſ. 12 cap. Sed 11 non poteſt metiri 2 per theſim & per 1 verſ. 11 cap. ergo metietur 2520. Similiter ob eaſdem cauſas 11 metietur quoque 1260, 630, 315, 105, 35, & 7: & ſic 11 qui multitudinis numerus à 7 diverſus eſt ex contradicentis propoſito metietur 7 primum ex theſi. At hoc eſt contra 1 verſ. 11 cap.

3. *Secunda pars ſic eſt. Si primi inventi multitudinis numeri á penultimo, ſequentes primos & ab iis factos omnes ſemel multiplicent, facti erunt omnes compoſiti metientes datum.*

Inveniendi ſunt omnes compoſiti metientes datum 5040. Primi igitur invẽti multitudinis numeri omnes á penultimo, & ſequentes primos, & ab iĩs factos ſemel multiplicent, factique ſunto, ut ſequitur:

Primi

Primi												
5	Compoſiti											
7	35											
3	15	21	105									
3	9	45	63	315								
2	10	14	70	6	30	42	210	18	90	126	630	
2	4	20	28	140	12	60	84	420	36	180	252	1260
2	8	40	56	280	24	120	168	840	72	360	504	2520
2	16	80	112	560	48	240	336	1680	144	720	1008	5040

Hic primúm inventi compoſiti metiuntur datum 5040. nam in 2 verſ. hujus cap. 5 menſus eſt 35 per 7. quare per 9 verſ. 5 cap. 7 metietur 35 per 5. Rurſum in 2 verſ. hujus cap. 3 mēſus eſt 105 per 35. ergo per 9 verſ. 5 cap. 35 metietur 105. Prætérea hîc ter 35, 7 & 5 fecerunt 105, 21 & 15. ergo per 5 verſ. 6 cap. ut 35 ad 7 ſic 105 ad 21, & ut 35 ad 5 ſic 105 ad 15.

35	7	5
105	21	15

Sed ex jam concluſo 7 & 5 metiuntur 35. ergo 21 & 15 metientur 105. Item in 2 verſ. hujus cap. 3 menſus eſt 315 per 105. itaque per 9 & 13 verſ. 5 cap. 105 & omnes ejus menſuræ metientur 315. Deinde ter 3, 15, 21 & 105 fecerunt 9, 45, 63 & 315. ergo per 5 verſ. 6 cap. ut 105 ad 21 ſic 315 ad 63, & ut 105 ad 15 ſic 315 ad 45, & ut 105 ad 3 ſic 315 ad 9.

105	21	15	3
315	63	45	9

Sed 21, 15 & 3 metiuntur 105 ut patuit: ergo 63, 45 & 9 metientur 315. Similibus argumentis idem concludes in 630, 1260, 2520 & 5040. Quare inventi, ut dictū eſt, compoſiti oēs metientur datū 5040. Sed nec ullus compoſitus alius ab iſtis ipſum 5040 metiri poterit. Nam ſi contrá exiſtimes, ergo aliquis compoſitus alius ab inventis putá 46 metiatur datum 5040 per 34. Hîc ex contradicentis propoſito 46 compoſitus eſt, & quidem ab inventis jam compoſitis omnibus diverſus:

ergo 46 ab omnibus inventis dati 5040 menſuris tam primis quàm compoſitis diverſus eſt. quotus igitur 34 per 7 verſ. 5 cap. alius etiam ab omnibus jam inventis menſuris numerus multitudinis eſt. Jam veró ut 2 ad 46 ſic per theſim & per 9 verſ. 6 cap. 34 eſt ad 2520. deinde per 9 verſ. 12 cap. 2 metitur 34 aut 46: metiatur 46 per 23. ergo 34 metietur quoque 2520 per 23. proportionalia enim ſunt 2, 46, 34 & 2520, ut patuit.

	5040
2	2520
2	1260
2	630
2	315
3	105
3	35
5	7

Sed ex ſuprá concluſo 34 alius ab omnibus inventis menſuris multitudinis numerus eſt. ergo per 7 verſ. 5 cap. 23 alius etiam ab inventis jam menſuris numerus multitudinis erit. Item ut 2 ad 34 ſic per theſim & per 9 verſ. 6 cap. 23 ad 1260. Præterea ut ſuprá 2 metitur 34 aut 23. ergo aut 34 aut 23 metietur 1260. Denique ſi in quotis per primas menſuras inventis proportiones ſimiliter perſequaris, duos tandem novos multitudinis numeros inter 5 & 7 proportionales invenies, quorum alterum primus 5 metietur per theſim & per 9 verſ. 12 cap. quare reliquus metietur primum 7. quod fuerit contra 1 verſ. 11 cap.

Duci igitur militum 5040 quærenti quot modis eos rectè ordinare poſſit, hæc inventio quæſitorum ordinum modos 30 ſuppeditabit: nempe dimidius hujuſmodi menſurarū numerus erit quæſitus numerus. Ordines militum ſic ſunt:

1	5	7	25	3	15	21	105	9	45
5040	1008	720	144	1680	336	240	46	560	112

63

63	315	2	10	14	70	6	30	42	210
89	16	2520	504	360	72	840	168	120	24
18	90	126	630	4	20	28	140	12	60
280	56	40	9	1260	252	180	36	420	84

His ſignificatur ſi ordo ſit militum 5040, tunc in exercitu unicum ordinem fore: ſi ordo ſit militum 1008, tũc 5 ordines fore: ſi ordo ſit militum 720, tunc 7 ordines fore, & ſic de cæteris. Superſunt adhuc nonnullæ proprietates primorum inter ſe quibus poſthac carere nõ poſſumus. Eas igitur ſequenti capite breviter explico.

De proprietatibus primorum inter ſe. Cap. XIIII.

1. SI duo dati numeri ſint primi inter ſe, alterius menſuræ ad reliqui menſuras primæ erunt.

Dati 8 & 27 ſunto primi inter ſe, tumq; omnes metientes 8 ſunto 1, 2, 4 & 8, & ſimiliter omnes metientes 27 ſunto 1, 3, 9 & 27. dico menſuras omnes unius datorum ad reliqui menſuras primas eſſe. Secus faciamus menſuras 2 & 3 inter ſe cõpoſitas eſſe, & maxima earum communis menſura eſto 2. Hîc 2 eſt numerus multitudinis per 7 verſ. 11 cap. qui numerus ex contradicentis propoſito metitur 2 & 3, qui ex theſi metiuntur 8 & 27 primos inter ſe. ergo per 13 verſ. 5 cap. numerus multitudinis 2 metietur primos inter ſe 8 & 27, quod erit cõtra 6 verſ. 11 cap. *Itaque*

2. Si duo numeri ſint primi inter ſe, metiens alterum erit primus ad reliquum.

Nam is reliquus metitur ſe ipſum per unitatem, ut patet per 2 verſ. 5 cap.

3. Si duo numeri ſint primi ad tertium, factus ab iis erit quoque ad eum primus.

Sunto 3 & 6 primi ad 5, factuſq; á 3 per 6 eſto 18: dico 18 eſſe primum ad 5. Secus per 5 & 8 verſ. 11 cap. aliquis primus

multitudinis numerus metietur 5 & 18. eos metiens exempli gratia eſto 2. Hîc 2 metiens 18 metietur quoque 3 aut 6 per 9 verſ. 12 cap. ſed idem 2 metitur quoque 5 ex contradicentis propoſito: ergo per. 7 verſ. 11 cap. 5 erit compoſitus ad 3 aut 6. At hoc eſt contra theſim. *Itaque*

4. *Si duo numeri ſint primi inter ſe, factus ab altero per ſe ipſum erit primus ad reliquum.*

Hujuſmodi enim factus, eſt factus á duobus primis ad reliquum.

5. *Si bis bini numeri ſigillatim ſint inter ſe primi, facti ab iis erunt inter ſe primi.*

Dati 3 & 5, itemque 2 & 4 ſigillatim ſint inter ſe primi: hoc eſt 3 ad 2 & 4, & ſimiliter 5 ad 2 & 4 primus eſto. Dico factum á 3 per 5 eſſe primum ad factum á 2 per 4. Hîc enim 3 primus eſt ad 2 & 4 per theſim: ideoque per 3 verſ. hujus cap. factus á 2 per 4 erit etiam ad 3 primus: & ob eaſdem cauſas factus idem ad 5 etiam primus erit. Jam cúm 3 & 5 ſint primi ad factum á 2 per 4, ergo rurſum per 3 verſ. hujus cap. factus á 3 per 5 erit ad factum á 2 per 4 primus.

6. *Si duo dati numeri ſint primi inter ſe, facti ab iis & per ſe, & per factos ab iis in infinitum, erunt primi inter ſe.*

Duo dati primi inter ſe ſunto 2 & 3: tumque facti á 2 per 2 & á 3 per 3 ſunto 4 & 9. item facti á 2 per 4 & á 3 per 9 ſunto 8 & 27. Dico 4 & 9 itemque 8 & 27 eſſe primos inter ſe. Primúm enim 2 & 3 ſunt primi inter ſe ex theſi, ideoq; 2 ad 3 & 3, iterumque 2 ad 3 & 3 primus erit. Ergo per 5 verſ. hujus cap. factus á 2 per 2 nempe 4 ad factum á 3 per 3 nempe ad 9 primus erit. Nunc 4 primus ad 9 ex jam concluſo erit quoque primus ad 3 per 1 verſ. hujus cap., ideoq; 2 primus ad 3 ex theſi ad 9 quoque primus erit per 1 verſ. hujus capitis: ergo per 5 verſ. hujus capitis factus á 2 per 4 nempe

nempe 8 ad factum á 3 per 9 nempe ad 27 primus erit.

De inventione generali communis tum maximæ menſuræ tum minimi dividui. Cap. XV.

1. *E Communibus numerorum menſuris quidem maxima, dividuis autem minimus vulgó quæritur.*

Hujuſmodi tum menſuræ tum dividui, quia communes ſunt, non niſi ad numeros inter ſe referri poſſunt: ideoque generalem horum inventionem corollarii loco huc adjeci. Huc facit quod inventio minimi dividui abſque doctrina primorum inter ſe demonſtrari non potuit.

2. *Inventio maximæ communis menſuræ ſic eſt. Si é duobus datis numeris alterum ab altero quoties fieri poterit tollas, & ſimilem fabricam in ſubducto & reliquo quoties poteris continues, ultimus ſubductus erit maxima communis datorum menſura.*

Invenienda eſt maxima communis menſura datorum 3420 & 930. hîc tollo 930 é 3420 quoties fieri poteſt, & manent 630. item tollo 630 é 930 quoties fieri poteſt, & manent 300. item tollo 300 é 630 quoties fieri poteſt, & manent 30. denique é 300 tollo 30 quoties fieri poteſt, & nihil remanet.

3420
930
630
300
30

In hac fabrica ultimus ſubductus eſt 30. Dico igitur 30 eſſe communem menſuram datorum 3420 & 930. Primúm enim 630 in duas inæquales partes diviſus eſt, quarum minor eſt 30, quæ per fabricam metitur 300: ipſe autem 300

etiam per fabricam ipſius 630 majorem partem metitur. ergo 30 majorem partem ipſius 630 metitur per 13 verſ. 5 cap. Sed & idem 30 ſeipſum metitur per 2 verſ. 5 cap. ergo per 11 verſ. 5 cap. 30 metietur 630. Atque ob eaſdem cauſas idem 30 metietur 930 & 3420. Quare 30 eſt communis menſura datorum 3420 & 930. Neque id tantùm: ſed & nullam menſuram datis 3420 & 930 communem majorem quàm 30 haberi poſſe dico. Secus 31 major quàm 30 metiatur 3420 & 930. Hic datus 3420 in duas inæquales partes diuiſus eſt, quarum minor eſt 630, majorem autem metitur datus 930, quem 930 ex contradicẽtis propoſito 31 metitur. ergo per 13 verſ. 5 cap. 31 majorem partem dati 3420 metietur. Deinde ex contradicentis propoſito 31 metitur quoque datum 3420. ergo per 12 verſ. 5 cap. ipſe 31 reliquum quoque 630 metietur. rurſumque ob eaſdem cauſas idem 31 metietur reliquos 300 & 30: & ſic 31 metietur 30, major numerus minorem, quod eſt cõtra ſcholium 2 verſ. 5 cap. Ergo 30 erit maxima communis menſura datorum 3420 & 930. *Itaque*

3. Numerus duos datos metiens eorum quoq; maximam communem menſuram metietur.

Conſectarium eſt é proxima demonſtratione.

4. Deinde ſi maximam duorum menſuram cum tertio aliquo conferas, maxima collatorum communis menſura trium datorum communis maxima menſura futura eſt: & ſic de pluribus.

Invenienda eſt maxima communis menſura datorũ 3420, 930 & 648. Primùm diximus maximam communem menſuram datorum 3420 & 930 eſſe 30. Jam per 2 verſ. hujus capitis, maxima communis menſura datorum 30 & 648 eſto 6. Hîc inquã 6 metietur datos 3420, 930 & 648. Primùm enim 6 metitur 648 ex theſi. Deinde idem metiens 30 datos quoque

que 3420 & 930 metietur per 13 verſ. 5 cap. Ergo 6 erit datorum 3420, 930 & 648 communis menſura: & quidem maxima. Secus 7 major quám 6 datos 3420, 930 & 648 metiatur. Hîc primúm quia ex contradicentis propoſito 7 metitur 3420 & 930, idem quoque metietur 30 per 3 verſ. hujus cap. Deinde quia 7 metitur 30 & 648 ex jam concluſo & ex cōtradicentis propoſito, ideó per theſim & per 3 verſ. hujus capitis, idem 7 metietur quoque 6 major numerus minorem contra ſcholium 2 verſ. 5 cap. Maxima communis menſura quatuor, quinque, ſex & denique datorum quotlibet eodem modo concludi poteſt. *Itaque*

5. *Numerus plures numeros metiens eorum quoque maximam communem menſuram metietur.*

Conſectarium eſt é proxima demonſtratione.

6. *Inventio minimi communis dividui ſic eſt. Si é duobus datis numeris alterum per illorum maximā communem menſuram dividas, & quotum per reliquum multiplices, factus erit minimus á datis communiter dividuus.*

Dati duo numeri ſunto 6 & 8, eorumq; maxima communis menſura eſto 2 per 2 verſ. hujus cap. quotus autem é 6 per 2 eſto 3, & factus á 3 per 8 eſto 24. dico 24 eſſe dividuum á datis 6 & 8. Etenim quotus ex 8 per 2 eſto 4. hîc per 9 verſ. 5 capitis 3 & 4 metientur 6 & 8 per 2 & 2, hoc eſt ut 6 ad 3 ſic 8 erit ad 4. ideoque per 6 verſ. 6 capitis factus á 3 per 8 hoc eſt 24 ex theſi erit factus á 6 per 4. ideoque per 2 verſ. 6 capitis 24 erit dividuus á datis 6 & 8. Neque id tantúm: ſed & nullum numerum minorem quám 24 á datis 6 & 8 dividuum haberi poſſe dico. Secus numerus minor quám 24 á datis 6 & 8 dividuus eſto 22, quotique é 22 per 6 & 8 ſunto 5 & 2. Hîc per 1 verſ. 6 cap. ſexies 5 & bis 8 facient 22 & 22. quare per 9 verſ. 6 cap. ut 2 ad 5 ſic

6 erit ad 8. At ex ſuprá concluſo ut 6 ad 3 ſic 8 ad 4: ergo alterné ut 6 ad 8 ſic 3 ad 4. ergo ex præmiſſis ut 2 ad 5 ſic 3 ad 4. Sed 3 & 4 ſunt primi inter ſe per theſim & per 7 verſ. 12 cap. ergo per 1 verſ. 12 cap. 4 erit minor quám 5, & 3 minor quám 2. At ex contradicentis propoſito factus á 3 per 8 major eſt quám factus á 2 per 8. ergo per 5 verſ. 6 cap. 3 erit major quám 2. ergo idem numerus eodem numero, nempe ternarius binario, & minor & major erit: quod abſurdum eſt.

7. *Deinde ſi inventum minimum á datis duobus dividuum cum tertio aliquo conferas, minimus á collatis dividuus erit minimus á tribus datis communiter dividuus: & ſic de pluribus.*

Inveniendus eſt minimus communis dividuus á datis 6, 8 & 15. Primúm diximus minimum dividuum á datis 6 & 8 eſſe 24. Jam per 6 verſ. hujus cap. minimus dividuus á datis 24 & 15 eſto 120. Dico 120 eſſe dividuum á datis 6, 8 & 15. Primúm enim ex theſi 120 minimus dividuus á datis 24 & 15, dividuus eſt á 15. Deinde ex theſi 6 & 8 metiuntur 24, & 24 metitur 120. quare 120 á tribus datis 6, 8 & 15 communiter dividuus eſt: & quidem minimus. Secus numerus minor quám 120 dividuus á datis 6, 8 & 15 eſto 118. Hìc 118 á datis 6 & 8 dividuus eſt: ideoque per theſim & per 15 verſ. 5 capitis, 24 metietur 118. minimus autem dividuus á 24 & 15 eſt 120 ex theſi. Ergo per theſim & per 15 verſ. 5 cap. 120 metietur 118, major numerus minorem, quod eſt contra ſcholium 2 verſ. 6 cap. Minimus dividuus á quatuor, quinque, ſex, imó á quotlibet datis eodem modo concludi poteſt. Sed verarum partium numeratio jam ſequitur.

De numeratione verarum partium in genere, & de reductionibus ei accidentibus. Cap. XVI.

1. Nume-

1. N*Umeratio verarum partium eſt quando dati numerandi ſunt veræ partes tantùm.*

2. *Huic numerationi accidit reductio terminorum partiumque. Reductio terminorum compoſitos inter ſe per maximam eorum communem menſuram dividit, & quotos pro datis terminis ſumit.*

Termini tam integris quàm partibus generales ſunt. Reductio igitur terminorum utriſque generalis eſt. Quoti autem pro datis terminis hîc ſumuntur: nam & eis proportionales ſunt per 9 verſ. 5 cap. & primi inter ſe per 7 verſ. 12 cap. ergo pro $\frac{6}{14}$ licebit ſumere $\frac{3}{7}$: pro 9 & 21 rectè ſumemus 3 & 7.

3. *Reductio partium eſt ad integra vel ad partes. Reductio ad integra duplex eſt. Prima quotum numeri per nomen diviſi pro datis ſolitariis partibus ſumit.*

Hujuſmodi quotus pro datis ſolitariis partibus ſumitur, quia eſt totum ex iis conſtans. Sic totum è $\frac{3}{3}$ eſt 1, totum è $\frac{6}{3}$ eſt 2. Ergo pro $\frac{3}{3}$ & $\frac{6}{3}$ ſumimus 1 & 2.

4. *Secunda numeros datarum partium ejuſdem inter ſe nominis pro ipſis partibus ſumit.*

Hujuſmodi enim numeri datis partibus proportionales ſunt: quæ proportio facilè demonſtrari poteſt. Sunto enim ejuſdem nominis partes $\frac{3}{7}$ & $\frac{4}{7}$. Dico ut $\frac{3}{7}$ ad $\frac{4}{7}$ ſic 3 eſſe ad 4. Nam per ſcholium 4 verſ. 2 cap. pro 3 & 4 dicito $\frac{3}{1}$ & $\frac{4}{1}$. Hîc factus à $\frac{4}{1}$ per $\frac{3}{7}$ erit factus à $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{1}$, ut patet per 3 verſ. 4 cap. Ergo per 9 verſ. 6 cap. ut $\frac{3}{7}$ ad $\frac{4}{7}$ ſic $\frac{3}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, hoc eſt ex fabrica ſic 3 ad 4.

5. *Reductio ad partes, datis diverſi nominis partibus æquales ejuſdem nominis partes pro ipſis datis ſumit.*

Hæc reductio multis modis fieri poteſt: ſed breviſſimè

minimum á datis nominibus dividuum pro communi quæſitarum partium nomine, pró earum autem numero quartum nomini datarum partium, invento minimo dividuo & datarum partium numero proportionalem ſumimus. Sic pro $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{36}$, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ ſumuntur $\frac{30}{36}$, $\frac{16}{36}$, $\frac{7}{36}$, $\frac{18}{36}$ & $\frac{9}{36}$. exemplum ſic eſt:

30	16	7	18	9
8	4	7	1	1
6	9	36	2	4
6	4	1	18	9

36

Hîc minimus dividuus á datis nominibus 6, 9, 36, 2 & 4 fuit 36. quartus autem proportionàlis 6, 36 & 5 fuit 30 per 3 verſ. 6 cap. Quare $\frac{30}{36}$ & $\frac{5}{6}$ æquales ſunt per 8 verſ. 6 cap. Eodem modo $\frac{16}{36}$ & $\frac{4}{9}$ inter ſe ęquabis.

De æquata verarum partium numeratione. Cap. XVII.

1. *NUmeratio æquata verarum partium ſolos partium ejuſdem nominis numeros numerat: & denique datarum partium nomen invento numero ſubjicit.*

Si igitur numerandæ partes diverſi nominis ſint, eas ad partes ejuſdem nominis reducemus. Hîc enim partes tantúm ejuſdem nominis numeramus.

2. *Additio verarum partium earum numeros addit, ut ſequitur.*

Ad $\frac{2}{7}$ adde $\frac{3}{7}$ & $\frac{4}{7}$ ſumma earum erit $\frac{9}{7}$ hoc eſt per 4 verſ. 16 cap. 1$\frac{2}{7}$.

Ad $\frac{2}{6}$ adde $\frac{3}{10}$. Hîc ſi terminos ante additionem reducas, addi-

	1	3	5	
additio ſic erit	x	ʒ	x	totus eſt $\frac{8}{10}$, hoc eſt $\frac{4}{5}$.
	—	—	—	
	4̸	x0̸	x	
	2	x	8	
		10		

Si terminorum reductionem in finem additionis differas,

	10	6	
additio ſic erit	x	ʒ	totus eſt $\frac{16}{20}$ hoc eſt $\frac{4}{5}$.
	—	—	
	4̸	x0̸	
	8	x	
	20		

At hoc ſecundum brevius eſt.

Ad $\frac{5}{8}$ adde $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$ & $\frac{5}{6}$. Hîc per 5 verſ. 16 cap. pro datis partibus ſumes $\frac{45}{72}$ $\frac{32}{72}$ $\frac{42}{72}$ & $\frac{60}{72}$.

Quare ſumma datarum partium erit $\frac{179}{72}$ hoc eſt per 4 verſ. 16 cap. $2\frac{35}{72}$.

3. *Subductio verarum partium, earum numerum alterum ex altero tollit, ut ſequitur.*

Tolle $\frac{3}{9}$ é $\frac{5}{9}$ manent $\frac{2}{9}$. Eſt $\frac{4}{20}$ vel per reductionem terminorum $\frac{1}{5}$. Hîc igitur ſicut antea in additione reductio terminorum in finem numerationis differtur.

	10		6
E	x	tolle	ʒ, reliquus
	—		—
	4̸		x0̸
	8		x
		20	

Tolle $\frac{2}{12}$ é $\frac{5}{33}$ & $\frac{7}{22}$. Hîc primúm per 5 verſ. 16 cap. pro datis partibus ſumes $\frac{42}{132}$, $\frac{22}{132}$, & $\frac{20}{132}$. Deinde partium $\frac{22}{132}$ & $\frac{20}{132}$ ſumma eſt $\frac{42}{132}$, quæ ſublata é $\frac{42}{132}$ nihil relinquit: quare ſublatis $\frac{2}{12}$ é $\frac{5}{33}$ & $\frac{7}{22}$ nihil remanet.

De numeratione verarum partium proportionata. Cap. XVIII.

1. *IN numeratione verarum partium proportionata inventus alteri datorum ſemper inæqualis eſt.*

In multiplicatione verarum partium multiplicans unitate minor eſt: ideoque hîc per 2 verſ. 4 cap. factus multiplicato minor erit. In diviſione unitas diviſore major eſt, ideoque hîc per 1 verſ. 5 cap. quotus diviſo major erit.

2. *Multiplicatio verarum partium homogeneos terminos inter ſe multiplicat.*

Homogeneos partium terminos earum numerum & numerum, itemque nomen & nomen: Heterogeneos contrá earum numerum & nomen intellige. Itaque per proximum verſiculum factus á $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$ erit $\frac{15}{28}$.

3. *Si heterogenei termini tam earundem quám diverſarum partium primi inter ſe ſint, facti ab homogeneis inter ſe primi erunt.*

Patet hoc per 5 verſ. 14 cap. Breviſſimé igitur hîc ante multiplicationem heterogenei termini ad primos reducuntur per 2 verſ. 16 cap. Itaque in multiplicatione $\frac{2}{3}$ per $\frac{15}{6}$ reductis terminis ad $\frac{1}{3}$ & $\frac{5}{3}$ facies $\frac{5}{9}$.

4. *Si multiplicandarum partium heterogenei termini partim æquales partim inæquales ſint, multiplicatio neglectis æqualibus fiet.*

Heterogenei enim æquales ad unitates reducuntur: unitas

tas porró multiplicando non auget. quare factus á $\frac{4}{5}$ per $\frac{5}{7}$ erit $\frac{4}{7}$. factus á $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$ & $\frac{7}{9}$ erit $\frac{2}{9}$. Ptolemæus in ſuo almageſto lib. primi cap. duodecimo compendium hoc ſumenda foris quantitate uſurpat.

5. *Diviſio verarum partium pro datis partibus integra ipſis proportionalia dividit.*

Divide $\frac{7}{10}$ per $\frac{3}{10}$, hujus diviſionis quotus erit quotus é 7 per 3 id eſt $2\frac{1}{3}$. Numeri enim partium ejuſdem nominis ipſis partibus proportionales ſunt, ut patet per ſcholium 4 verſ. 16 cap. Si dividendæ partes diverſi nominis ſint, axioma ad inveniendos partium ejuſdem nominis numeros primos inter ſe ſic eſt.

6. *Si termini tum homogenei tum earundem partium heterogenei ſint primi inter ſe, facti á numeris datarum partium per alternum nomen inter ſe primi erunt.*

Patet hoc per 5 verſ. 14 cap. Breviſſimé igitur hîc ante diviſionem compoſiti termini ad primos inter ſe per 2 verſ. 16 cap. reducuntur. Itaque in diviſione $\frac{28}{75}$ per $\frac{32}{140}$, reductis terminis inventos numeros 21 & 20 pro datis partibus dividimus, quotumque $1\frac{1}{20}$ pro quoto datarum partium ſumimus.

Itaque

7. *Si dividendarum partium numerus numero dividentium æqualis ſit, neglectis numeris dividetur nomen dividentium partium per nomen dividendarum.*

Numeri enim æquales ad unitates reducuntur: unitas autem multiplicando non auget. Si igitur dividendæ ſint $\frac{4}{7}$ per $\frac{4}{5}$ quotus erit $\frac{5}{7}$.

De numeratione miſta in genere, & de miſta ęquata. Cap. XIX.

1. HUc *uſque ſimplicem numerationem habuimus: miſta ſequitur in qua dati numerandi variorum generum numeri ſunt.*

Hic enim dati numerandi modó utriuſque generis primarii, modó ut libet ſecundarii numeri ſunt.

2. Numerationi miſtæ præter antecedentes reductiones accidit etiam integrorum reductio, quæ pro veris integris partes ſecundarias eis æquales ſumit.

Hic partium nomen datur, pro quarum numero factum ab integris per datum nomen ſumimus. Itaq; cúm 1 ad ſecundas, 5 ad duodecimas reducimus, pro 1 & 5 ſumimus $\frac{2}{2}$ & $\frac{60}{12}$.

3. Miſta numeratio æquata ſeparatim & integra inter ſe, & partes inter ſe numerat.

Sic facilitas major eſt.

4. Additio miſta datos addit, ut ſequitur.

Ad 5 adde 4$\frac{7}{8}$, ſumma erit 9$\frac{7}{8}$.

Ad 4$\frac{7}{8}$ adde 7$\frac{5}{6}$. Primúm ſumma partium $\frac{7}{8}$ & $\frac{5}{6}$ eſt $\frac{41}{24}$, hoc eſt per 4 verſ. 16 cap. 1$\frac{17}{24}$. nunc ad 1 adde 4 & 7, additorum ſumma erit 12. quare ſumma integræ additionis eſt 12$\frac{17}{24}$.

Ad 48 libellas, 17 ſol. 8 denar. adde 54 lib. 6 ſ. 9 d. & 18 lib. 13 ſ. 10 d. additio ſic erit:

48 l.	17 ſ.	8 d.
54	6	9
18	13	10
121	8	3

5. Subductio miſta datorum alterum ex altero ſubducit, ut ſequitur.

E 6$\frac{1}{7}$ tolle 2$\frac{7}{8}$ & 1$\frac{45}{56}$. Hic primúm addes 2$\frac{7}{8}$ & 1$\frac{45}{56}$. additorum

torum ſumma erit $4\frac{19}{28}$. Itaque tolles 4 é 6, manebunt 2: & $\frac{19}{28}$ é $\frac{5}{7}$ ſupererit $\frac{1}{28}$, & ſic integer propoſitæ ſubductionis reliquus erit $2\frac{1}{28}$.

Si ſubducendæ partes iis á quibus ſubductio fit majores ſint, tunc é reliquis integris unitatem mutuamus, eamque ad partes datis cognomines reducimus. Tolle $2\frac{3}{4}$ é $9\frac{1}{2}$. Hic primúm $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{2}$ reduces per 5 verſ. 16 cap. ad $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$. tumque ſublatis 2 é 9 manent 7: ſed quia $\frac{3}{4}$ non poſſunt tolli é $\frac{2}{4}$, ideó pro 7 ſcribes tantúm 6. tumq; é $\frac{6}{4}$ tolles $\frac{3}{4}$, manebunt $\frac{3}{4}$. & ſic integer propoſitæ ſubductionis reliquus erit $6\frac{3}{4}$.

E 19 lib. 9 ſol. 5 denar. tolle 18 lib. 15 ſol. 8 denar. ſubductio ſic erit:

	13	9
19 l.	9 ſ.	5 d.
18	15	8

De numeratione miſta proportionata.

Cap. XX.

1. *Miſta numeratio proportionata partes cū integris conjunctim numerat.*

Sic facilitas major eſt.

2. *Hæc numeratio proportionata verarum partium numerationis analogiam imitatur: ideoque veris integris unitatem ſubjicit.*

3. *Multiplicatio miſta homogeneos terminos multiplicat, ut ſequitur.*

Quæris quid valeant $\frac{5}{8}$ aureorum 60? multiplica $\frac{5}{8}$ per $\frac{60}{1}$, facies $\frac{75}{2}$ id eſt per 4 verſ. 16 cap. $37\frac{1}{2}$. ergo $\frac{5}{8}$ aureorum 60 erunt $37\frac{1}{2}$ aurei.

Reductio particularū ad partes eſt multiplicatio miſta qua partes per integra ſecundaria multiplicamus. Teſtator primū ex quincūce, ſecundū ex triēte reliquę hæreditatis, tertiū

ex reliqua parte hæredem inſtituit. De ſecundi parte quæritur, quanta ea totius hæreditatis pars ſit? Multiplica $\frac{1}{3}$ per $\frac{4}{5}$ facies $\frac{4}{15}$ quæ ſignificant $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{5}$ eſſe quatuor partes totius hæreditatis diviſæ in quindecim partes. ſic $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{7}$ ſunt $\frac{2}{7}$.

Multiplica $5\frac{2}{3}$ per $3\frac{2}{5}$. Primúm per 2 verſ. 19 cap. pro datis terminis ſumes $\frac{17}{3}$ & $\frac{17}{5}$ quibus inter ſe multiplicatis feceris $\frac{289}{15}$ hoc eſt per 4 verſ. 16 cap. $19\frac{4}{15}$.

4. *Diviſio miſta quotum invenit, ut ſequitur.*

Dividendæ ſunt $\frac{2}{5}$ per 2, hîc diuides $\frac{2}{5}$ per $\frac{2}{1}$, quotus per 7 verſ. 18 cap. erit $\frac{1}{5}$.

Divide $36\frac{60}{169}$ per $7\frac{5}{13}$. hîc primúm datos reduces ad integra 64 & 13: tumque diviſis 64 per 13, quotus propoſitæ diviſionis erit $4\frac{12}{13}$.

TABV-

TABULA PRIMA
ticæ, inter pagina

Prima pars Arithmeticæ explicat
- Notationē, cujus pars
  - Prima eſt de notis Arithmeticis
    - Per ſe, quarum
      - Prior
      - Deci
    - Inter ſe, quæ diſtinguuntur
      - Gra
      - Per
  - Secunda explicat numerorum
    - Terminos
    - Species in numeris
- Numerati-
  - Primò
    - Æquata, ut
      - Additio
      - Subduc
    - Proportionata, ut
      - Multiplicatio
      - Diviſio

BERNARDI SALIGNACI BURDEGALENSIS ARITHMETICÆ
liber ſecundus.

De comparatione in quantitate. Cap. I.

1. *PRima pars Arithmeticæ numerorum notationem & numerationem expoſuit; ſecunda eorum comparationem in quantitate & qualitate inſtituet.*

Comparatio in quantitate & qualitate logica eſt. Hîc igitur pręcepta logica ad Arithmeticam applicari certum eſt.

2. *Comparatio in quantitate eſt quando duos tantùm terminos inter ſe comparamus: primus antecedens, ſecundus conſequens appellatur.*

3. *Comparatio in quantitate eſt æqualitatis aut inæqualitatis. Æqualitatis comparatio eſt cujus termini inter ſe æquales ſunt:*

Sic comparationes 1 ad 1, 2 ad 2, 3 ad 3 æqualitatis ſunt.

4. *Inæqualitatis comparatio eſt cujus termini inter ſe inæquales ſunt. Si terminus antecedens conſequente major minorve erit, comparatio inæqualitatis majoris minoriſve erit.*

Sic comparatio 3 ad 2 inæqualitatis majoris, comparatio 2 ad 3 inæqualitatis minoris eſt.

5 *Item cõparatio in quantitate eſt differentia aut ratio.*

Etſi in iiſdem terminis & differentiam & rationem conſideremus, tamen conſideratio rationis non eſt conſideratio differentiæ. Ratio igitur æqualitatem & inæqualitatem complectitur, at differentiam non complectitur, ut non abs re du-

plicem comparationis in quantitate diviſionem faciamus. Si quis tamen λόγοι genus ad differentiam & rationem faciat, nõ admodum repugno: nam & ἀναλογία tam ad differentias quám ad rationes pertinet. Verúm hac mea duplici diſtinctione doctrinam minús ambiguam habituri ſumus: nam comparatio quidem inæqualitatis majoris minoriſque in genere tam ad differentiam quám ad rationem pertinet, ſed ſpecies inæqualitatis, ut ſuperparticularis & ſuperpartiens aut cõtrá ſubſuperparticularis & ſubſuperpartiens ad rationẽ non etiam ad differentiam pertinent: denique cúm res commodé abſq; tropo doceri poteſt, proprietatem tropo libenter antepono.

6. Differentia eſt reliquus qui invenitur ſubductione minoris á majore.

Sic differentia 3 á 2 eſt 1 in comparatione majoris inæqualitatis: differentia 3 ab 8 eſt 5 in comparatione minoris inæqualitatis. Itaque differentiarum numeratio reliquorum numeratio eſt. Si differentia 3 á 2 ad differentiam 3 ab 8 addenda ſit, addes 1 ad 5: ſi hæc per illam multiplicanda ſit, multiplicabis 5 per 1. Idem de differentiarum ſubductione & diviſione dicendum.

7. Ratio eſt quotus antecedentis per conſequentẽ diviſi.

Hîc numero inexplicabile tractare alienum eſt: quare numerabilem tantum rationem hoc loco inſtituimus. Ea dicitur quotus antecedentis per conſequentem diviſi. Sic cúm quæritur quæ ſit ratio 2 ad 2, 2 ad 1, 2 ad 3, quotos 1, 2, $\frac{2}{3}$, hoc eſt rationem æqualitatis, duplam, & ſubſeſquialteram reſpõdemus. Itaq; ut antea differentiarum numeratio reliquorum numeratio dicta eſt, ſic modó rationum numerationem quotorum numerationem dicimus. Sæpe tamen pro quotis ipſos rationum terminos quaſi partes numeramus: nempe rationũ antecedentes quaſi numeros, cõſequentes quaſi nomina partium ſumimus: ſic enim terminorum numeratio quotorum nume-

numerationi omnino reſpondet. Hinc ſequitur rationū additionem & multiplicationem, itemq; ſubductionem & diviſionem inter ſe diverſas eſſe: in numerandis enim ſive quotis ſive partibus additio & multiplicatio, itemq; ſubductio & diviſio omnimodo differunt. Antea pro unitate & unitatis partibus adverſus communē opinionē diſputavi, hîc modó pro rationum numeratione adverſus mathematicorum vulgus imó adverſus ſummos noſtri temporis mathematicos mihi certamen eſt. Ergo in addendis rationibus 1 ad 2 & 2 ad 4 faciamus ex adverſarii propoſito additionem eſſe multiplicationem ſic:

1	2	1
2	4	4

Hujus additionis ex adverſarii propoſito ſumma eſt ratio 1 ad 4, quæ ratio ratione 2 ad 4 minor eſt: minor enim numerus ad eundem minorem habet rationem quám major. ergo totum erit ſua parte minus: nam totum ex additis conſtans ipſorum ſumma eſt. Si rationum additio earum multiplicatio eſt, totum ſua parte minus erit ut patuit: hoc abſurdū eſt: igitur & illud. Ad ſubductionē venio. pro ſubductione rationis 1 ad 3 á ratione 1 ad 2 divide rationē 1 ad 2 per rationē 1 ad 3 ſic:

1	1	2
3	2	3

Hujus igitur ſubductionis ex adverſarii propoſito reliquus eſt ratio 2 ad 3, quæ ratio ratione 1 ad 2 major eſt ut patet multiplicatione numerorum per alternum nomen. Hîc enim pro rationibus 1 ad 2 & 2 ad 3 habebis rationes 3 ad 6 & 4 ad 6. Ratio autem 4 ad 6 ratione 3 ad 6 major eſt: major enim numerus ad eundem majorem habet rationem quám minor. ergo pars ſuo toto major erat: nam totum é ſubducto & reliquo conſtans eſt id á quo ſubductio facta eſt. Si rationum ſubductio earum diviſio eſt, pars ſuo toto major eſt ut patuit: hoc abſurdum eſt: igitur & illud. Sed ajunt,

quod à me dicitur in additione ſummam æquari additis, & in ſubductione terminum à quo ſubductio fit æquari ſubducto & reliquo, hoc locum habere in ſimplici numerorum numeratione, in rationum numeratione locum non habere. Ergo ex iſta bella diſtinctione axioma illud *Totum omnibus ſuis partibus æquatur*, in ſimplici numerorum numeratione verum erit, in rationum numeratione verum non erit. Imó apud Euclidem & alios recté diſtingui poteſt & nomen compoſitionis, ut modó additionem, modó multiplicationem ſignificet: & nomen diviſionis, ut nunc proprié, modó improprié accipiatur. At hoc axioma *Totum omnibus ſuis partibus æquatur*, diſtingui perinde non poteſt, ut illîc verum, hîc falſum ſit: potius totam matheſim, potius univerſam naturam deſtruxeris quám illud in ullo rerum aut rationum genere vel tantillum infirmaris. Equidem à doctiorum opinione recedere valde periculoſum ſemper putavi, ſed vbi ratio & veritas diverſum dictitant, ὅσιον προτιμᾶν τὴν ἀλήθειαν, licet, expedit, & ſanctum eſt veritatem anteponere. Nulla ſcientia abſurdorũ eſt. Igitur mathematica nec totum ſua parte minus, nec partem ſuo toto majorem dicet.

8. *Duarum rationum termini antecedentes, itemq; conſequentes homologi, unius autem rationis antecedens & alterius conſequens heterologi dicuntur.*

Ut 1 ad 2 ſic 4 ad 8. hîc 1 & 4, itemque 2 & 8 homologi: contrá 1 & 8, itemq; 2 & 4 heterologi dicuntur.

9. *Si ratio inæqualitatis majoris eſt, ea ſimplex aut multiplex eſt. Simplex eſt quando terminus conſequens in antecedente ſemel continetur & præterea aliquid ipſo conſequente minus.*

10. *Ea eſt ſuperparticularis aut ſuperpartiens. Superparti-*

particularis eſt in qua ſublato conſequente ab antecedente pars conſequentis ſupereſt.

Si conſequentis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ſupereſt, ratio ſuperparticularis ſeſquialtera, ſeſquitertia, ſeſquiquarta dicitur. Hujus generis ſunt rationes 3 ad 2, 4 ad 3, & 5 ad 4.

11. *Superpartiens eſt in qua ſublato conſequente ab antecedente partes conſequentis ſuperſunt.*

Si conſequentis partes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ſuperſunt, ratio ſuperpartiens ſuperbitertia, ſupertriquarta, ſuperquadriquinta dicitur. Hujus generis ſunt rationes 5 ad 3, 7 ad 4, & 9 ad 5.

12. *Multiplex ratio eſt quando terminus conſequens in antecedente ſæpius cõtinetur: eſtque exacta aut redundans.*

13. *Exacta eſt quando terminus antecedens conſequentem ſæpius exactè continet.*

Hujus generis ſunt rationes 2 ad 1, 3 ad 1, 4 ad 1. Prima ratio dupla, ſecunda tripla, tertia quadrupla dicitur.

14. *Redundans eſt ratio multiplex quando ſublato conſequente ab antecedente quoties poteſt, conſequentis pars aut partes aliquot ſuperſunt: ratio illic multiplex ſuperparticularis, hîc multiplex ſuperpartiens dicitur.*

Sic rationes 5 ad 2, 10 ad 3, & 17 ad 4, dupla ſeſquialtera, tripla ſeſquitertia, & quadrupla ſeſquiquarta dicuntur. Sic rationes 8 ad 3, 15 ad 4, & 24 ad 5, dupla ſuperbitertia, tripla ſupertriquarta, & quadrupla ſuperquadriquinta dicuntur.

15. *Si ratio inæqualitatis minoris ſit, ea contrariæ rationis nomen præpoſita particula ſub, retinet.*

Sic rationes 2 ad 3, 3 ad 5, 1 ad 2, 2 ad 5, & 3 ad 8, ſubſeſquialtera, ſubſuperbitertia, ſubdupla, ſubduplaſeſquiquin-

ta & ſubdupla ſuperbitertia dicuntur. Ex ſuperioribus ſatis rationum tum genera tum nomina intelligi arbitror. Verùm in explicandis rationibus, quod idẽ in earum numeratione uſuvenire monui, pro ſpecialibus rationum nominibus ſæpe earum terminos dicimus. Sic ratio peripheriæ ad diametrum minor quám ratio 22 ad 7, ratio intervalli inter columnas Herculis & Indiam ad intervallum inter Æthiopiam & Mæotin major quám ratio 5 ad 3: Ratio circuli ad diametri quadratum, ratio 11 ad 14 dicitur.

De comparatione in qualitate & præcipué de proportione. Cap. II.

1. *HActenus de comparatione in quantitate. Sequitur comparatio in qualitate, quæ ejuſdem generis comparationum in quantitate comparatio eſt.*

Ejuſdem generis inquam, hoc accipe ut utraque comparatarum comparationum vel differentia vel ratio ſit.

2. *Comparatio in qualitate eſt proportio aut diſproportio. Proportio eſt quãdo comparationum in quantitate qualitas eadem eſt.*

Qualitas eadem hîc intelligitur, quando aut differentiæ aut rationes comparatæ inter ſe eædem ſunt.

3. *Proportio eſt disjuncta aut continua. Disjuncta eſt cujus termini ſecundus & tertius diverſi ſunt: eſtque directa aut reciproca.*

4. *Directa eſt quando comparatio primi ad ſecundum eſt comparatio tertii ad quartum.*

Ut in his exemplis 1, 3, 5, 7. 1, 4, 8, 32. ut 1 differt à 3 ſic 5 à 7. ut 1 eſt ad 4 ſic 8 eſt ad 32. Hujuſmodi ꝓportiones directę ſunt, quia in iis comparatio primi termini ad ſecundum eſt comparatio tertii ad quartum.

5. Si

5. Si duo ordines, terminorum numero pares ſint, & in primo ordine comparatio primi ad ſecundum, ſecundi ad tertium, tertii ad quartum & deinceps, ſit in ſecundo ordine comparatio primi ad ſecundum, ſecundi ad tertium, tertii ad quartum & deinceps, termini extremi directè proportionales erunt.

Hujuſmodi proportio vulgó æquatio ordinata dicitur, quia terminorum ordo ſuperior ſimiliter inferiori ſumitur. ut 1 differt á 2 ſic 6 á 7, & ut 2 ab 8 ſic 7 á 13, & ut 8 á 12 ſic 13 differt á 17.

Proportio differentiarum.	1	2	8	12
	6	7	13	17

Dico ut 1 differt á 12 ſic 6 differre á 17. Quoniam enim propoſiti termini proportionales ſunt, ut dictum eſt, iidem quoque alternè proportionales erunt per 17 verſ. 5 cap. primi lib. ut igitur 1 differt á 6 ſic 2 á 7, & ſic 8 á 13, & ſic 12 á 17. ergo á primo ad ultimum ut 1 differt á 6 ſic 12 á 17, & alternè ut 1 á 12 ſic 6 á 17. Eadem demonſtratio in rationum quoque proportionibus locum habet, ut in ſubjecto exemplo vides:

Proportio rationum.	2	8	12	24
	7	28	42	84

6. Reciproca proportio eſt proportio disjuncta, quando comparatio primi termini ad ſecundum eſt comparatio quarti ad tertium.

Ut in his exemplis 1, 3, 7, 5. 1, 2, 16, 8. ut 1 differt á 3 ſic 5 á 7: & ut 1 ad 2 ſic 8 eſt ad 16. Itaque hæc proportio á directa ſolo terminorum ſitu differt. Alii propoſitos terminos ſic diſponunt 1, 7, 3, 5. 1, 16, 2, 8. & ſic comparatiónem primi termini ad tertium, comparationem faciunt quarti ad ſecundum. Ego in pari brevitate facilitatem majorem ſequor.

7. Si duo ordines, terminorum numero pares ſint, & comparatio in primo ordine primi ad ſecundum, ſecundi ad tertium, tertii ad quartum & deinceps, ſit in ſecundo ordine comparatio ſecundi ad primum, tertii ad ſecundum, quarti ad tertium & deinceps, termini extremi reciprocé proportionales erunt.

Ordinatam æquationem ſuprá in 5 verſ. habuimus, hîc modó turbata proponitur. Ordo ſuperior inferiori illîc ſimiliter, hîc diſſimiliter ſumitur. Ut 5 differt á 7 ſic 4 á 6, & ut 7 á 2 ſic 9 á 4, & ut 2 ab 8 ſic 3 á 9.

Proportio differentiarum.	5	7	2	8
	6	4	9	3

Dico ut 5 differt ab 8 ſic 3 differre á 6. Hîc enim ex theſi 7–5 eſt 6–4, & 7–2 eſt 9–4. ergo per ſecundam partem 10 verſ. 3 cap. 1 lib. ut 2 á 5 ſic 7–5 differt á 7–2, hoc eſt ex theſi ſic 6–4 á 9–4, hoc eſt per primam partem 10 verſ. 3 cap. 1 lib. ſic 6 differt á 9. Ergo á primo ad ultimum ut 2 á 5 ſic 6 differt á 9. Itaque jam neglectis 7 & 4 ſimiliter demonſtrabis ut 8 á 5 ſic 6 differre á 3. Eadem æquatio in rationũ proportionibus argumentis pauló diverſis demonſtratur. Ut 5 eſt ad 7 ſic 45 eſto ad 63, & ut 7 ad 9 ſic 35 ad 45, & ut 9 ad 15 ſic 21 eſto ad 35.

Proportio rationum.	5	7	9	15
	63	45	35	21

Dico ut 5 eſt ad 15 ſic 21 eſſe ad 63. hîc enim facti á 5 per 63, á 7 per 45, á 9 per 35 & á 15 per 21 inter ſe æquantur per theſim & per 6 verſ. 6 cap. primi libri. Æqualibus igitur factis á 5 per 63 & á 15 per 21, ut 5 eſt ad 15 ſic per 9 verſ. 6 cap. primi lib. 21 erit ad 63. Proportionis turbatæ termini vulgó ſic diſponuntur.

			5	7	9	15
21	35	45	63			

Verúm

Verúm ſi terminorum ſeries pauló longior ſit, difficiliús eam exerceas, quia termini ſuperiores haud recté inferioribus reſpondent. Ego in pari brevitate majorem facilitatem ſequor.

8. Continua eſt proportio in qua idem terminus pro ſecundo & tertio ſumitur.

Ut in his exemplis 1, 2, 3. 1, 5, 25. ut 1 differt á 2 ſic 2 á 3. ut 1 eſt ad 5 ſic 5 ad 25. Hujuſmodi proportiones cõtinuæ ſunt, quia in iis idem terminus pro ſecundo & tertio ſumitur.

9. Si plures medii pro duobus continué ſumantur progreſſio dicitur, in cujus doctrina terminus primus ſemper minimus erit.

Hoc enim in doctrina progreſſionum ita ſumimus.

De proportione Arithmetica. Cap. III.

1. AMpliús proportio eſt Arithmetica aut Geometrica. Arithmetica eſt proportio differentiarum.

Ut 1 differt á 2 ſic 4 á 5. Hujuſmodi proportio arithmetica eſt, quia differentiarum eſt.

2. Proportionis Arithmeticæ disjunctæ proprietates duæ ſunt. Prima ſic eſt. Si quatuor numeri ſint arithmeticé proportionales, extremi mediis æquabuntur.

Differentia 16 á 12 eſto 4, & ut 16 differt á 12 ſic 10 differat á 6. Dico extremos 16 & 6 mediis 12 & 10 æquari. Nam hîc per theſim & per ſcholium 8 verſ. 3 cap. primi lib. 12 + 4 & 16, itemque 6 + 4 & 10 æquantur: ideoque per 6 verſ. 3 cap. primi lib. 12 + 4 + 10 & 16 + 4 + 6 æquantur. ergo per 9 verſ. ejuſdem cap. 12 + 10 & 16 + 6 æquabuntur.

3. Secunda proprietas ſic eſt. Si é datis bis binis inæqua-

libus numeris medii extremis æquentur, quatuor dati erunt arithmeticé proportionales.

E datis bis binis 9, 7, 5 & 3 medii 7 & 5 extremis 9 & 3 æquales ſunto. dico ut 9 differt á 7 ſic 5 differre á 3. Etenim ſumma é 7 & 5 eſto 12. hîc ſumma é 9 & 3 erit quoque 12 per theſim: ideoque ut 9 á 7 ſic per 10 verſ. 3 cap. primi lib. 12 – 7 differt á 12 – 9 hoc eſt per ſab. ſic 5 differt á 3.

4. *Proportionis Arithmeticæ continuæ proprietates quoque duæ ſunt. Prima ſic eſt. Si proportio Arithmetica tribus tantúm terminis continuetur, terminus medius erit dimidium ſummæ extremorum.*

Patet hoc per 2 verſ. hujus cap.

5. *Secunda ſic eſt. Si terminus medius ſit dimidium ſummæ extremorum, erit medius extremis continué proportionalis.*

Patet hoc per 3 verſ. hujus cap.

De progreſſione Arithmetica. Cap. IIII.

1. D*Octrina progreſſionis Arithmeticæ, de ipſius differentiis & terminis eſt: utrobique autem inventio & ſingularis & multitudinis eſt. Sed varié: in differentiis duplex multitudinis inventio ſingularem inventionem unicam, in terminis inventio ſingularis duplex duplicem multitudinis inventionem præcedit.*

2. *Differentiarum inventiones priores ſunt. Si á numero terminorum unitatem tollas, reliquus erit numerus differentiarum.*

Hujus cauſa eſt quia hîc termini medii pro duobus continué ſumuntur per primam partem 9 verſ. 2 cap.

3. Si ab ultimo termino primum tollas, reliquus erit ſumma differentiarum.

Hujus cauſa eſt quia in progreſſione terminus primus minimus eſt per 2 partem 9 verſ. 2 cap. Ex his duabus multitudinis inventionibus ſingularis differentiæ inventio jam ſequitur.

4. Si ſublato primo termino ab ultimo reliquum per numerum terminorum uno minus dividas, quotus erit progreſſionis differentia.

Numerus enim differentiarum per differentiam multiplicatus ſummam differentiarum faciet per 2 verſ. 4 cap. primi libri. Summa igitur differentiarum hoc eſt per 3 verſ. hujus cap. reliquus qui ſublato primo ab ultimo invenitur, diviſus per differentiarum numerum hoc eſt per 2 verſ. hujus cap. diviſus per numerum terminorum uno minus dabit differentiam in quoto per 1 verſ. 6 cap. primi lib.

E liberis 8 natu maximus annos 50, minimus annos 27 natus eſt, omneſq; á primo ad ultimum annis inter ſe pariter differunt: dic annorum differentiam. Hîc extremi ſunt 27 & 50, numerus terminorum eſt 8. ergo per proximum verſ. quotus é 50 – 27 per 8 – 1 hoc eſt quotus é 23 per 7 erit quæſita differentia. erit igitur ea $3\frac{2}{7}$.

5. Terminorum inventiones ſequuntur. Si ſublata unitate é numero terminorum, reliquum per differentiam multiplices & factum ab ultimo tollas, reliquus erit primus terminus.

Hîc primus reliquus eſt numerus differentiarũ per 2 verſ. hujus cap. ideoque factus ab eo per differentiam erit ſumma differentiarum per 2 verſ. 4. cap. primi lib. Si igitur hujuſmodi factũ ab ultimo tollas, reliquus erit primus progreſſionis terminus per 3 verſ. hujus cap.

Tabellarius Corbachia Argentoratum octavo die pervenit: quo in itinere ſequenti die tria ſtadia ſupra proximum antecedentem ſemper confecit, dic quot ſtadia primo die cōfecerit? Hîc numerus terminorum eſt 8, eorum differentia eſt 3, ultimus terminus eſt 27. Jam 8 – 1 hoc eſt 7 eſt numerus differentiarum per 2 verſ. hujus cap. Itaque per theſim factus à 3 per 7 nempe 21 erit ſumma differentiarum: ergo per proximum verſ. 27 – 21 hoc eſt 6 erit primus progreſſionis terminus. Quare tabellarius primo die 6 ſtadia confecerit.

Itaque

6. Si ſublata unitate é numero terminorum reliquum per differentiam multiplices, factus auctus primo termino erit ultimus.

Ultimus terminus minutus facto fuit primus per 5 verſ. hujus cap. ergo per ſcholium 8 verſ. 3 cap. primi lib. factus auctus primo termino erit ultimus.

7. Si ſublato primo termino ab ultimo reliquum per differentiam dividas, quotus auctus unitate erit numerus terminorum.

Reliqui diviſi per terminorum numerum uno minus quotus fuit differentia per 4 verſ. hujus cap. ergo per 8 verſ. 5 capitis primi libri reliqui diviſi per differentiam quotus erit numerus terminorum uno minus: ideoque auctus unitate erit ipſe terminorum numerus.

Vicinus prolem numeroſam habet, ejus liberi omnes à primo ad ultimum biennio differunt, natu minimus annos 16 maximus annos 48 natus eſt: liberorum numerus quæritur. Hîc extremi ſunt 16 & 48, differentia eſt 2, quotus autem é 48 – 16 hoc eſt quotus é 32 per 2 eſt 16: ergo per proximum verſiculum 16 + 1 hoc eſt 17 erit quæſitus liberorum numerus. Inventio ſummæ terminorum ſequitur.

8. Si

8. *Si dimidium numeri terminorum per ſummam extremorum multiplices, factus erit ſumma terminorum progreſſionis.*

Progreſſio arithmetica terminorum quinque eſto 6, 9, 12, 15, 18. Deinde 2½ dimidium numeri terminorum per 24 ſummam extremorum multiplicetur, factuſque eſto 60. dico 60 eſſe ſummam terminorum 6, 9, 12, 15 & 18. Hic enim ut 6 á 9 ſic per theſim 15 differt ab 18. ergo per 2 verſ. 3 cap. 6+18 & 9+15 æquabuntur. Itaque bis 6+18 erit ſumma é 6, 9, 15 & 18. Præterea per theſim ut 9 á 12 ſic 12 differt á 15. ergo per 5 verſ. 3 cap. dimidium é 9+15 hoc eſt ex concluſo dimidium é 6+18 erit 12. quare ex præmiſſis factus á 2½ per 6+18 erit ſumma terminorum 6, 9, 12, 15 & 18. Eandem ſummam reperias ſi numerum terminorum per ſummæ extremorũ dimidium multiplices: quia ut numerus terminorum eſt ad ſummam extremorum: ſic per 5 verſ. 6 cap. primi lib. dimidium numeri terminorum eſt ad dimidium ſummæ extremorum. Ergo per 6 verſ. ejuſdem cap. factus á dimidio ſummæ extremorum per numerum terminorum facto á dimidio numeri terminorum per ſummam extremorum æquabitur.

Filius xeniorum nomine primo anni die á patre nummos 12 accipit: eique nummorum numerus ſequentibus diebus toto menſe Januario denariis 6 augetur: dic xeniorum ſummam. Primúm menſis Januarius dies habet 31 pro numero terminorum, eorum differentia ex theſi eſt 6: primus autem terminus eſt 12. Deinde factus á 31−1 hoc eſt factus á 30 per 6 eſt 180: itaque 180+12 hoc eſt 192 eſt ultimus terminus per 6 verſ. hujus cap. Dimidium autem numeri terminorum eſt 15½ ſummaque extremorum 12 & 192 eſt 204. quare per proximum verſiculum factus á 15½ per 204 hoc eſt 3162 erit quæſita xeniorum ſumma.

De proportione Geometrica & quidem de disjuncta. Cap. V.

1. *ARithmeticam proportionem Geometrica ſequitur, quæ eſt proportio rationum, & generali nomine proportio vulgò appellatur.*

Proportionem Arithmeticam Geometricæ non ut quantitatem diſcretam continuæ opponimus: nihil enim in Arithmetica ἀναλογιῶν volumus, ſed proportionem illic differentiarum, hîc rationum inſtituimus: ſic enim proportionem é ſubjectis diſtinguimus. Proportio autem Geometrica ab excellentia ſua ſupra arithmeticam generale proportionis nomen meruit. Ergo proportionis nomine, Geometrica poſthac intelligatur, idque in terminis æqualibus: æqualium enim & minorum proportio ipſa per ſe cuivis notiſſima eſt.

2. *Si proportio disjuncta eſt, vulgò datis tribus terminis quartus quæritur; é tribus autem datis duo inter ſe homogenei ſunt.*

Ad inventionis quarti proportionalis uſum præcepta de numeris non abſtractis hîc quædam ſunt: neq; enim termini homogenei, abſtracti numeri ſunt. Sed hujuſmodi inventionis uſus commodé abſq; homogeneis explicari nequit. Velimus igitur quod quæamus.

3. *Si ſecundus homogeneus major terminum majorem, aut minor minorem requirit, proportio directa eſt: & tertius terminus quæſtionem ingreditur.*

Cúm á vicino 15 aurei exiguntur, ego tres numero, quid numerabo cúm ab illo 25 exigentur? hîc homogenei termini ſunt vicini aurei 15 & 25: & cũ á vicino plus exigitur, ego quoque plus exigor: hæc igitur proportio directa eſt, & terminorum diſpoſitio ſic eſt: 15 3 25 5.

Item

Item cúm ego 25 numero, vicinus numerat 15, ergo cúm ego 5 numero, quid numerabit vicinus? Hîc homogenei ſunt 25 & 5. dein de ſecundus homogeneus minor minorem terminum requirit: hæc igitur proportio directa eſt, & terminorum diſpoſitio ſic eſt: 25 15 5 3.

In hujuſmodi autem quæſtionibus quartus proportionalis per 3 vel 6 verſ. 6 cap. primi lib. invenitur.

4. *Si ſecundus homogeneus major terminum minorem, aut minor majorem requirit, proportio reciproca eſt: & ſecundus terminus quæſtionem ingreditur.*

Cúm panis eſt unciarum $6\frac{2}{3}$ modius tritici venditur aureis 3, cúm igitur modius venditur aureis 5, quot unciarum panis futurus eſt? Hîc homogenei termini ſunt modiorum pretia 3 & 5, & modii pretium majus, panem pauciorum unciarum requirit quàm modii pretium minus. Hæc igitur proportio reciproca eſt, & terminorum diſpoſitio ſic eſt:

$6\frac{2}{3}$, 5, 3, 4.

Item cúm panis eſt unciarum 4, modius tritici venditur aureis 5, ſi igitur modius vendatur aureis 3, quot unciarum panis futurus eſt? Hîc homogenei termini ſunt modiorum pretia 5 & 3: & modii pretium minus, panem plurium unciarum requirit quàm modii pretium majus. Hęc igitur proportio reciproca eſt, & terminorum diſpoſitio ſic eſt:

4, 3, 5, $6\frac{2}{3}$.

In hujuſmodi autem quæſtionibus quartus reciprocè proportionalis per 4 vel 11 verſ. 6 cap. primi lib. invenitur.

5. *Si datis homogeneis æquales numeri ſimiliter adjunguntur, neglectis æqualibus proportio fiet.*

Si boves 2 arant jugera 4 diebus $23\frac{1}{3}$, boves etiam 2 quot dieb. arabũt jugera 3? Hîc 4 jugera & 3 jugera termini homogenei ſunt quibus æquales numeri 2 & 2 ſimiliter adjungũtur

præterea hîc minor terminus minorem requirit, ergo neglectis æqualibus proportio directa ſic erit:

$4,\ 23\frac{1}{3},\ 3,\ 17\frac{1}{2}.$

Si boves 2 arant jugera 3 diebus $17\frac{1}{2}$, boves 7 quot diebus arabunt jugera 3. hîc boves 2 & boves 7 homogenei termini ſunt, & ſecundus homogeneus major minorem terminum requirit : ergo neglectis æqualibus proportio reciproca ſic erit: $2,\ 7,\ 17\frac{1}{2},\ 5.$

De proportione disjuncta vulgari deque ejus ſimplicis exemplis. Cap. VI.

1. Proportio disjuncta eſt vulgaris aut artificialis. Vulgaris ſi ſuperiora teneas, ſingulare artificium nullum habet. In ea exempla ſunt proportionis modó ſimplicis modó multiplicis. Sequentia exempla ſimplicis proportionis ſunt.

1. Mercator Argentoratenſis Francofurti aromata 100 aureis emit: (aureus 25 batziorum eſt) aromatum pondus eſt 800 libellæ. Vectigal mercium fuit 6 aurei, vectura 9 aureis conſtitit: Inſtitoris ſumptus in hoc itinere 7 aurei fuerunt. Mercator 40 aureos lucraturus quanti aromatis libellā vendet? Hîc ſumptuum omnium cum lucro ſumma eſt 162 aurei. Jam libellæ 800 ſunt aureorum 162, ergo 1 lib. $\frac{81}{400}$ unius aurei, hoc eſt 5 batzii & 7 nummi. In hoc exemplo additio proportionem anteceſſit, in ſequenti ſubductionem proportio ſequetur.

2. Mercator pannum aureis 10 emit, vendidit 12: ſi 14 aureis emptum vendidiſſet, dic lucrum. R. Primó ut lucrum á ſorte diſtinguam tollo 10 é 12, manent 2 pro lucro é 10. Deinde quæſtionem concludo ſic: 10 lucrantur 2, ergo 14 lucrabuntur $2\frac{4}{5}$. In ſequenti exemplo additio & ſubductio proportionem præcedent.

3. Tur-

3. Turris $\frac{1}{4}$ in terra latet, $\frac{1}{6}$ demergitur ſub aqua, reliqua pars 120 cubitis ſupra aquam eminet: quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Primúm $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ eſt $\frac{5}{12}$. deinde $\frac{12}{12}-\frac{5}{12}$ ſunt $\frac{7}{12}$. Jam veró ſi $\frac{7}{12}$ ſunt 120, $\frac{1}{4}$ erit 51 $\frac{3}{7}$, & $\frac{1}{6}$ erit 34 $\frac{2}{7}$. quare cubiti in terra erunt 51 $\frac{3}{7}$, in aqua 34 $\frac{2}{7}$.

4. Interdum duo primi proportionis termini unico continentur, ut in his quæſtionibus, quis numerus continet in ſe 12 ter & $\frac{2}{3}$? quot ſunt duodecimæ in $\frac{3}{4}$? hîc 3 $\frac{2}{3}$, itemq; $\frac{3}{4}$ duos primos quæſtionis terminos continent; ſed pro 3 $\frac{2}{3}$ ſumimus $\frac{11}{3}$, quibus ſignificatur, quoties 3 in 11 continentur, toties 12 in quæſito numero contineri. Quæſitus igitur numerus erit 44. proportio ſic eſt: 3 11 12 44.

5. In altera autem illa quæſtione quot ſunt duodecimæ in $\frac{3}{4}$? proportio ſic eſt: 4, 3, 12, 9. quare in $\frac{3}{4}$ erunt $\frac{9}{12}$. Superiora exempla directæ proportionis fuerunt: ſequentia duo proportionis reciprocæ futura ſunt.

6. Quindecim boves agrum diebus 18 arant, quot igitur diebus 20 boves illum arabunt? proportio reciproca ſic eſt: 18, 20, 15, 6.

7. Tria millia obſeſſorum auxilium á noſtris ante ſex menſes ſperare non poſſumus. Si in urbe omnes retinemur, urbem hoſtibus neceſſarió tradimus: commeatus enim duorum tantúm menſium ſuppetit. ſi igitur urbem ſervare volumus, quot in ea retinebimur? proportio reciproca ſic eſt:

3000 6 2 1000.

Quare é 3000 civium 1000 tantúm retineri poſſumus.

De multiplicis proportionis exemplis. Cap. VII.

1. *Sequentia exempla multiplicis proportionis ſunt.*

1. Putearius puteum ulnarum 34 effodiendum libellis 60 redemit: effoſſis 20 ulnis in morbum incidit, & ita mercedem ſibi debitam poſtulat, quanta igitur ea eſt? Quæſtio prima fronte recté ſic concludi videtur, 34 ulnæ libellis

60 redimuntur, ergo 20 ulnæ redimuntur libellis $35\frac{5}{17}$. Verúm ulna ſecunda duarum ulnarum, tertia trium, & deinceps ſequentes ſui & omnium antecedentium laborem continēt. Quare propoſitæ quæſtionis concluſionem duæ progreſſiones arithmeticæ antecedunt. Prima terminorum 34 eſt, ejuſque extremi ſunt 1 & 34: ſumma autem terminorum per 7 verſ. 4 cap. eſt 595. Secunda progreſſio 20 terminorum eſt, ejuſque extremi ſunt 1 & 20. ſumma autem terminorum per 7 verſ. 4 cap. eſt 210. Jam veró ut 595 ulnæ ſunt ad 60 lib. ſic 210 ad $21\frac{5}{17}$. quare merces putario debita erit 21 lib. 3 ſ. 6 d. & $\frac{6}{17}$ unius denarii. Dein proportio geometrica principem proportionem antecedet, cujus principis primus terminus nunc additione, modó ſubductione invenitur: primi termini per additionem inventio præcedit.

2. E curſoribus duobus primus Lutetia Lugdunum iter 5 diebus abſolvit, alter idem iter Lugduno Lutetiam tribus diebus conficit: uterque hodie hora duodecima iter ſuum ingreditur: quando & ubi ſibi occurrent? Hîc duæ proportiones primam quæſtionem præcedunt. Prima ſic eſt. Primus 5 diebus iter abſolvit, ergo 1 die $\frac{1}{5}$ itineris faciet. Secunda ſic eſt. Secundus triduo iter abſolvit, ergo 1 die $\frac{1}{3}$ itineris faciet. Nunc $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$ eſt $\frac{8}{15}$ pro primo præcipuæ proportionis termino: ea autem ſic concluditur. $\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur uno die, ergo integrum iter $1\frac{7}{8}$ diei abſolvitur. Curſores igitur perendie hora nona matutina ſibi invicem occurrent. Supereſt ubi occurrant. Primus 5 diebus iter ſuum abſolvit, ergo $1\frac{7}{8}$ diei, itineris $\frac{3}{8}$ fecerit: quare locus occurſus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris á primo confecti.

3. Fons tres fiſtulas habet: ſi ſolæ fluant, prima $\frac{1}{4}$ horæ, ſecunda $\frac{1}{2}$, tertia hora una ſubjectum lacum implet: ſi ſimul fluant, quanto tempore illum implebunt? Hîc duæ proportiones præcedunt. Prima ſic eſt: Si prima fiſtula ſola fluat, $\frac{1}{4}$ horæ ſemel lacum implet: ergo una hora quater eum impebit.

bit. Altera proportio ſic eſt: ſi ſecūda fiſtula ſola fluat, $\frac{1}{2}$ horæ ſemel lacum implet, ergo una hora bis eum implebit. Deniq; ſi tertia fiſtula ſola fluit, una hora lacum implere dicitur. Jam ſumma impletionum horæ unius eſt 7 pro primo principis proportionis termino: eaque ſic concluditur. Si propoſitæ fiſtulæ ſimul fluant, lacus impletur ſepties hora una: ergo idem ſemel una ſeptima horæ implebitur.

4. E quatuor architectis ædificium totum abſolveret primus anno uno, ſecundus duobus, tertius tribus, quartus quatuor. Si omnes ſimul adhibeantur, quāto tempore ædificium abſolvent? R. Secundus 2 annis abſoluit totum opus, tertius tribus, quartus quatuor: ergo anno 1 ſecundus abſolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$. Adde jam ſingulorum opus 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. habebis $\frac{25}{12}$. unde concludes $\frac{25}{12}$ operis fiunt 1 anno, ergo integrum opus fiet $\frac{12}{25}$ unius anni, hoc eſt 5 menſibus, 22 diebus, 19 horis & $\frac{1}{5}$ unius horæ. Adhuc primus principis proportionis terminus additione inventus eſt, deinceps ſubductione invenietur.

5. Fons duabus fiſtulis lacum intermedium habet, quæ fiſtulæ ſi ſolæ fluant, ſuperior lacum 4 horis implet, inferior eum undecim horis vacuat: ſi ſimul fluant, quanto tempore implebitur lacus? Hic duæ proportiones præcedunt. Prima ſic eſt: ſi ſuperior fiſtula ſola fluat, 4 horæ implent lacum: ergo una hora implebit $\frac{1}{4}$ lacus. Secunda ſic eſt: ſi inferior fiſtula ſola fluat, undecim horæ vacuant lacum: ergo vna hora vacuabit $\frac{1}{11}$ lacus. Jam $\frac{1}{4} - \frac{1}{11}$ eſt $\frac{7}{44}$. unde concludes, $\frac{7}{44}$ lacus implentur hora una: ergo totus lacus horis $6\frac{2}{7}$ implebitur. In ſequenti exemplo additio ſubductionem præcedet.

6. E tribus architectis ædificium primus 30 diebus abſolvit, ſecūdus 40, tertius ſi cum reliquis duobus adhibeatur, 15 diebus illud abſolvit: ſi ſolus operetur, quanto tempore idem efficiet? Hic duæ proportiones præcedunt. prima ſic eſt:

Primus diebus 30 ædificium abſolvit, ergo 15 diebus abſolvet $\frac{1}{2}$. Secunda ſic eſt: Secundus diebus 40 ædificium abſolvit, ergo 15 diebus abſolvet $\frac{3}{8}$. Jam $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ ſunt $\frac{7}{8}$, deinde $\frac{8}{8}-\frac{7}{8}$ ſunt $\frac{1}{8}$ pro primo proportionis termino, quam ſic concludes. Si tertius ſolus operetur 16 $\frac{1}{8}$ ædificii abſolvit diebus 15, ergo integrum ædificium diebus 120 abſolvet. Similem antecedentis vel numerationis vel proportionis uſum in Regula veri quam nuper Illuſtriſſimo Principi Gulielmo Landgravio Haſſiæ dicavi, non inutiliter videbis.

De proportione disjuncta artificiali, & de proportionum proportionaliumque additione & ſubductione. Cap. VIII.

Caput hoc auro quovis pretioſius judico: hîc arculæ, hîc μυροθήκιον, hîc ingens mathematicorum theſaurus latet.

1. P*Roportio disjuncta artificialis eſt quæ præter ſuperiora ſingulare aliquod artificium habet. Ea eſt compoſita aut continuata. Compoſita eſt proportio quæ duarum numeratarum certi generis proportionum tertium inventum continet: eſtque primùm additio aut ſubductio, deinde multiplicatio.*

Diviſionem vnius rationis in rationem aliam ſæpe & præſertim in muſicis videmus: verùm diviſionem duarum rationum ſimilium in duas alias ſimiles, hoc eſt diviſionem proportionis in aliam proportionem, adhuc non vidi. Neque tamen res impoſſibilis eſt: nam ſi proportio 3, 4, 17 $\frac{1}{2}$, 23 $\frac{1}{3}$ per proportionem 2, 7, 5, 17 $\frac{1}{2}$ faciat proportionē 3, 14, 5, 23 $\frac{1}{3}$, conſequens eſt proportionem 3, 14, 5, 23 $\frac{1}{3}$, diviſam per proportionem 2, 7, 15, 17 $\frac{1}{2}$, quotum habere proportionem 3, 4, 17 $\frac{1}{2}$, 23 $\frac{1}{3}$. verum hujuſmodi diviſionis uſum ignoro.

2. Ad-

2. *Additio duas proportiones conſequentium æqualium addit.*

Nimirum hîc proportionum rationes primæ inter ſe, itemque ſecundæ inter ſe adduntur. Hujus additionis axioma ſic eſt.

3. Si datarum duarum proportionum conſequentes æquales ſint, ut ſumma primorum antecedentium ad primum cõſequentem, ſic ſumma ſecundorum antecedentium ad ſecundum conſequentem.

Ut 24 eſt ad 6 ſic 36 ad 9: & ut 2 ad 6 ſic 3 eſt ad 9. Dico ut 24+2 eſt ad 6 ſic 36+3 eſſe ad 9. Hîc enim per ſcholium 7 verſ. 1 cap. ratio 24 ad 6 addita ad rationem 2 ad 6 eſt ratio 24+2 ad 6.

24	2	26
6	6	6

Similiter ratio 36 ad 9 addita ad rationem 3 ad 9 eſt ratio 6+3 ad 9.

36	3	39
9	9	9

Quare per 6 verſ. 3 cap. primi lib. ut 24+2 ad 6 ſic 36+3 ad 9.

Itaque

4. Si quatuor numeri proportionales ſint, ut primus & ſecundus ad ſecundum, ſic tertius & quartus ſunt ad quartũ.

Hoc proximæ additionis compendium aliquod eſt: nam ſi datæ proportionis terminos ſecundum quartumque iteraveris, alteram proportionem conſequentium datæ æqualium feceris. Ut 3 ad 4 ſic 6 eſto ad 8. hîc licet ſumere ut 4 ad 4 ſic 8 eſſe ad 8: ideoque per 3 verſ. ut 3+4 ad 4 ſic 6+8 erit ad 8. In his exemplis rationum additiones ſunt quæ neque antecedentes, neq; conſequentes terminos inter ſe multiplicant: ergo, inquam, rationum additio á rationum multiplicatione

diverſa eſt. Hîc dicet fortaſſe aliquis, datis proportionibus 6, 24, 9, 36, & 6, 2, 9, 3, eſſe quoq; ut 6 ad 24 + 2 ſic 9 ad 36 + 3: itẽ datis proportionalibus 4, 3, 8, & 9, eſſe quoq; ut 4 ad 3 + 4 ſic 8 ad 9 + 8, & proinde in exemplis ſuperioribus non rationum ſed terminorum additiones fuiſſe. Sed accidit proportionibus alternari & inverti, ut nihil neceſſe ſit inverſos earum terminos novam terminorum additionem facere: maximé cúm vera & legitima rationum additio manifeſta in terminis non inverſis appareat. Terminorum quotlibet proportionalium additio é proximis ſuperioribus orta, ſic eſt.

5. Si quotlibet dati numeri proportionales ſint, ut omnes antecedentes ad omnes conſequentes ſic unus antecedentium erit ad ſuum conſequentem.

Ut 3 ad 6 ſic 4 ad 8, & ſic 5 ad 10, & ſic 7 ad 14. dico ut 3 + 4 + 5 + 7 ad 6 + 8 + 10 + 14 ſic 3 eſſe ad 6. hîc enim primúm eſt ut 3 ad 6 ſic ex theſi 4 ad 8, & alterné ut 3 ad 4 ſic 6 ad 8: & per 4 verſ. ut 3 + 4 ad 4 ſic 6 + 8 ad 8. Prætereaut 4 ad 8 ſic ex theſi 5 ad 10, & alterné ut 5 ad 4 ſic 10 ad 8: ergo per 3 ꝟ. ut 3 + 4 + 5 ad 4 ſic 6 + 8 + 10 ad 8. Item ut 4 ad 8 ſic ex theſi 7 ad 14, & alterné ut 7 ad 4 ſic 14 ad 8: ergo per 3 ꝟ. ut 3 + 4 + 5 + 7 ad 4 ſic 6 + 8 + 10 + 14 ad 8: ergo alterné ut 3 + 4 + 5 + 7 ad 6 + 8 + 10 + 14 ſic 4 ad 8 hoc eſt ex theſi ſic 3 ad 6. Notabis hîc obiter huiuſmodi additionem non rationum ſed terminorum eſſe. Rationum enim additio partium additionem imitans ſolos antecedentes eorûndem conſequentium numerat: at hîc tam antecedentes inter ſe quàm conſequentes inter ſe additi ſunt.

6. Additionem ſubductio ſequitur. Subductio datis duabus proportionibus conſequentium æqualium, alteram é reliqua tollit.

Nimirum hîc proportionis ſecundæ ratio prima é prima ratione

tione proportionis primæ, itemque proportionis ſecundæ ratio ſecunda é ſecunda ratione proportionis primæ tollitur. Huius ſubductionis axioma ſic eſt.

7. Si datarum duarum proportionum termini conſequentes æquales ſint, erit ut differentia primorum antecedentium ad primum conſequentem, ſic differentia ſecundorum antecedentium ad ſecundum conſequentem.

Ut 26 ad 6 ſic 39 ad 9, & ut 24 ad 6 ſic 36 eſto ad 9. dico ut 26–24 eſt ad 6 ſic 39–36 eſſe ad 9. Hîc enim per ſcholium 7 verſ. 1 cap. ratio 24 ad 6 ſublata é ratione 26 ad 6 relinquit rationem 26–24 ad 6.

26	24	2
6	6	6

& ſimiliter ratio 36 ad 9 ſublata é ratione 39 ad 9 relinquit rationem 39–36 ad 9.

39	36	3
9	9	9

Quare per 9 verſ. 3 cap. 1 lib. ut 26 – 24 ad 6 ſic 39–36 erit ad 9. *Itaque*

8. Si quatuor numeri proportionales ſint, erit ut primus ſecundo minutus ad ſecundum ſic tertius quarto minutus ad quartum.

Hoc proximæ ſubductionis compendium aliquod eſt. Ut 7 ad 4 ſic 14 ad 8. hîc licet ſumere ut 4 ad 4 ſic 8 eſſe ad 8: ideoq; per 7 verſ. erit ut 7 – 4 ad 4 ſic 14–8 ad 8. In his exemplis rationum ſubductiones ſunt abſq; ulla diviſione: ergo inquam ego rationum ſubductio a rationum diviſione diverſa eſt. Controverſam numerationum diuerſitatem obtinui primó ex rationis definitione, ſecundó obtinui ex abſurdo, tertió denique ex uſu additionis & ſubductionis rationum præſtantiſſimo eã nunc quoq; hoc capite obtineo. Ergo

veritatem quibuſvis autoritatibus meritó antepono. Pergo: é verſu proximo terminorum proportionalium orta ſubductio ſic eſt.

9. *Si fuerit ut totus ad totum ſic ablatus ad ablatum, erit ut totus ad totum ſic reliquus ad reliquum.*

Ut 3+4+5+7 ad 6+8+10+14 ſic 3 eſto ad 6. dico ut 3+4+5+7 ad 6+8+10+14 ſic 4+5+7 eſſe ad 8+10+14. Hîc enim theſim alternando ut 3+4+5+7 ad 3 ſic 6+8+10+14 ad 6: ergo per 8 verſ. hujus cap. ut 4+5+7 ad 3 ſic 8+10+14 ad 6, & alterné ut 4+5+7 ad 8+10+14 ſic 3 ad 6, hoc eſt ex theſi ſic 3+4+5+7 ad 6+8+10+14. Hîc etiam notabis ut ſuprá, hujuſmodi ſubductionem nõ rationum ſed terminorum ſubductionem eſſe, quia rationum ſubductio partium ſubductionem imitans conſequentes non numerat, hæc autem ſubductio tam antecedentes inter ſe quám conſequentes inter ſe numerat. P. Ramus Alligationem ad ſubductionem terminorum referre videtur cap. 11. lib. 2. ſuæ Arithmeticæ: ſed alligationis ſubductio proportionalium terminorum non eſt: neque enim differentiæ extremorum á medio, proportionalium differentiæ ſunt. Vulgus quoque Arithmeticorum Alligationem in Arithmetica exponit. Sed hoc nõ recté: præcepta enim Arithmeticæ de numeris abſtractis eſſe debent, cujus generis Alligationis præcepta non ſunt, ut ex ejus definitione patet. Quamobrem Alligationis peculiarem tractatum uná cum partium tractatu Illuſtriſſimo piæ memoriæ Friderico Sac. Imp. Electori & Comiti Palatino abhinc quatuor annos ſeorſim dicavi. Quid in eo effecerim, Lectoris judicium fuerit.

De regula ſocietatis & quidem de prima ejus ſpecie; Cap. IX.

1. *Additio terminorum propter ſingularem ejus in decidendis*

dendis cõtroverſiis uſum vulgò regula ſocietatis appellatur.

Hîc ſumma è conſequentibus ſecundarum rationum & ad ipſos conſequentes ſeorſim inveniendos datur,& pro conſequente primæ rationis ſumitur: pro eiuſdem antecedente ſummam è ſecundarum rationum antecedẽtibus ſumimus.

2. *Regula ſocietatis duplex eſt: prima eſt in qua ſeparati ſecundarum rationum antecedentes dantur.*

Duorum ſociorum primus aureos 8, ſecundus 6 contulit: lucrati ſunt aureos 7, quantum ſingulis accedit? Hîc dati antecedentes ſecundarum rationum ſunt 8 & 6, quorum ſumma eſt 14. quæſtio igitur ſic concluditur:

	8	4
14 lucrantur 7, ergo		
	6	3

Tres partiuntur aureos 100, ea lege ut cúm primus ceperit $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ aureorum 100, ſecundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{7}$ capiat. Hęc ſpecies prima fronte abſurda videri poſſit: nam ſi primus pro $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ſumat aureos $33\frac{1}{3}$ & 25, ſecundus totum quod ſibi debetur habere non poterit, tertius nihil habiturus eſt: ſed tamen regula ſocietatis abſq; abſurdo quæſtionem ſolvet. Hîc enim ſeparatorum antecedentium $\frac{35}{60}$, $\frac{27}{60}$, & $\frac{22}{60}$ ſumma eſt $\frac{84}{60}$. Quare reductis partibus ad integra per ſcholium 5 verſ. 18 cap. 1. lib. quæſtionem ſic concludimus.

	35	pro	$41\frac{2}{3}$
84 ſumuntur pro 100,	27	pro	$32\frac{1}{7}$
ergo	22	pro	$26\frac{4}{21}$

Quatuor ſic partiũtur aureos 600, ut cúm primus ceperit $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, ſecundus $\frac{3}{5}$ & 8, tertius $\frac{5}{6}$ & 7, quartus $\frac{7}{8}$ & 6 accipiat. Hîc quoq; duæ primæ partes totum ſuperant, ut propoſita ſpecies nihilo ſuperiore abſurdior videatur: ſed regula ſocietatis hanc controverſiam ſic dirimet. Primúm ſumma è 9, 8, 7, & 6 eſt 30. deinde 600 − 30 eſt 570 pro primæ rationis conſequente. itẽ partes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ & $\frac{7}{8}$ ad integra 80, 72, 100 & 105 re-

ducuntur per ſcholium 5 verſ.18 cap.lib. primi. Reductorum itaq; ſumma pro antecedēte primæ rationis eſt 357, & quæſtio ſic concluditur.

	80	pro	$136\frac{261}{357}$
357 ſumuntur pro 570.	72	pro	$122\frac{114}{119}$
Ergo	100	pro	$166\frac{79}{119}$
	105	pro	$173\frac{12}{17}$

Sed præterea 136 + 9 ſunt 145: quare primi pars erit $145\frac{261}{357}$ item 122 + 8 ſunt 130: quare ſecundi pars erit $130\frac{114}{119}$. item 166 + 7 ſunt 173: quare tertii pars erit $173\frac{79}{119}$. deniq; 173 + 6 ſunt 179: quare quarti pars erit $179\frac{12}{17}$.

De ſecunda regula ſocietatis. Cap. X.

1. *Secunda regula ſocietatis eſt quæ ſeparatos ſecundarum rationum antecedentes invenit: idq; datorum multiplicatione, aut factorum á datis additione. illic facti ſunt ad conſequentes ut ſumma factorũ eſt ad ſummam conſequentium: hic ſummæ factorum ſunt ad conſequentes ut earum ſumma eſt ad ſummam conſequentium.*

Exemplum ubi ſeparati antecedentes datorum multiplicatione inveniuntur. Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis ſtipendium eſt 4 aurei, equitis 9. Præda aureorum 2000 eis dividenda, quantum peditibus, quantum equitibus dabitur? Hîc factus á ſtipendio peditum per illorum numerũ eſt 24400, & factus á ſtipendio equitum per illorum numerum eſt 6534. qui facti ſecundarũ rationũ antecedentes ſunt, & horum ſumma eſt 30934. quæſtionem igitur ſic concludo.

	24400	$1577\frac{8541}{15467}$
30934 dant 2000. Ergo	6534	$422\frac{6926}{15467}$

Exemplum

Exemplum ubi ſeparati antecedentes factorum á datis additione inveniuntur. Quatuor mercatorum biennii ſocietate inita primus 30 aureos contulit, ſed octavo póſt exacto menſe 10 ſubduxit, iterumq; viceſimo menſe ineunte 12 contulit. Secundus initio 24 contulit, ac ſexto póſt exacto menſe 8 ſubduxit: denuoq; ſexti decimi initio quatuordecim retulit. Tertius initio contulit 20, & ſeptimo póſt exacto menſe omnes ſubduxit, ſed deinde decimi octavi initio 16 retulit. Quartus ſeptimo menſe ineunte 18 aureos contulit: ſed quarto póſt exacto menſe 9 ſubduxit: iterumq; decimi ſeptimi initio 15 addidit. Lucrati ſunt aureos 100. Lucrum ſingulorum quæritur. Hic menſibus per cuiuſq; ſortes multiplicatis, factorum eiuſdem ſummæ pro ſecundarum rationum antecedentibus ſumentur, & ſic quæſtio concludetur. Primúm igitur facti á 30 per 8, á 20 per 11, & á 32 per 5 ſunt 240, 220, & 160: eorumq; ſumma eſt 620, pro primi ſorte. Deinde facti á 24 per 6, á 16 per 9, & á 30 per 9 ſunt 144, 144, & 270, eorumq; ſumma eſt 558 pro ſecundi ſorte. Tertió facti á 20 per 7 & á 16 per 7 ſunt 140 & 112, eorumque ſumma eſt 252 pro tertii ſorte. Quartó facti ab 18 per 4, á 9 per 6, & á 24 per 8 ſunt 72, 54, & 192, eorumq; ſumma eſt 318 pro quarti ſorte. Jam ſumma é ſingulorum ſortibus 620, 558, 252 & 318 eſt 1748. Ergo quæſitum ſingulorum lucrum ſic concludimus.

	620	$35\frac{205}{437}$
	558	$31\frac{403}{437}$
1748 lucrantur 100, ergo	252	$14\frac{182}{437}$
	318	$18\frac{84}{437}$

De proportionum multiplicatione. Cap. XI.

1. *MUltiplicatio duas proportiones multiplicat, quarum prima tertium terminum quarto ſecundæ æqualem habet.* Hic

2. *Si multiplicatæ proportiones directæ ſint, erit ut factus á primis terminis ad factum á ſecundis, ſic tertius terminus ſecundæ proportionis ad quartum primæ.*

Ut 3 ad 4 ſic $17\frac{1}{2}$ ad $23\frac{1}{3}$, & ut 2 ad 7 ſic 5 eſto ad $17\frac{1}{2}$. itē factus á ratione 3 ad 4 per rationem 2 ad 7 eſto ratio 3 ad 14. Dico ut 3 eſt ad 14 ſic 5 eſſe ad $23\frac{1}{3}$. Hîc enim per ſcholium 7 verſ. 1 cap. huius lib. & per 4 verſ. 18 cap. primi factus á ratione $17\frac{1}{2}$ ad $23\frac{1}{3}$ per rationem 5 ad $17\frac{1}{2}$ erit ratio 5 ad $23\frac{1}{3}$.

3	4	$17\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{3}$
2	7	5	$17\frac{1}{2}$
3	14	5	$23\frac{1}{3}$

Ergo per theſim & per 14 verſ. 6 cap. primi lib. ut 3 ad 14 ſic 5 ad $23\frac{1}{3}$.

3. *Si multiplicatæ proportiones ſint reciprocæ, erit ut factus á primis terminis ad factum á ſecundis, ſic quartus terminus primæ proportionis ad tertium ſecundæ.*

Patebit hoc in iiſdem proportionibus ſi ſecundam é datis primam feceris, & in utriſque tertium terminum quarto loco poſueris ſic.

2	7	$17\frac{1}{2}$	5
3	4	$23\frac{1}{3}$	$17\frac{1}{2}$
3	14	$23\frac{1}{3}$	5

Harum multiplicationum uſus inſignis eſt in proportione quæ vulgó dupla é datis duplicatis homogeneis dicitur. In ea enim datis tribus factæ proportionis terminis quartus quæritur: ſed é tribus datis unicus actu, reliqui duo poteſtate dātur. In dupla directa bis bini primarum rationum homologi pro duobus ab iis factis, in dupla reciproca bis bini rationum primarum heterologi pro factis ab homologis dantur: in dupla directa factus á duobus primis, in dupla reciproca factus ab homolo-

homologis primo & quinto primus factæ proportionis terminus eſt: deniq; factę proportionis termini illic alternantur, hîc locum non mutant.

Exempla duplæ proportionis directæ. 1. Tres aurei menſibus duobus lucrantur 5, ergo 4 aurei menſibus 7 quid lucrabuntur? Hîc duæ primæ rationes 3 ad 4 & 2 ad 7 inter ſe multiplicatæ faciunt rationem 3 ad 14 ſic.

	1	
3	2	3
4	7	14
2		

Tumq; ut 3 ad 14 ſic 5 ad $23\frac{1}{3}$. Quare ſi 3 aurei menſibus duobus lucrentur 5, 4 aurei menſibus 7 lucrabuntur $23\frac{1}{3}$. Hæc quæſtio ſyllogiſmo evidentiore concludi poteſt ſic. Si 3 aurei menſibus 7 lucrentur $17\frac{1}{2}$, quatuor aurei menſibus 7 lucrabuntur $23\frac{1}{3}$.

Sed ſi 3 aurei menſibus 2 lucrentur 5, tres aurei menſibus 7 lucrabuntur $17\frac{1}{2}$.

Ergo ſi tres aurei menſibus duobus lucrentur 5, quatuor aurei menſibus 7 lucrabuntur $23\frac{1}{3}$.

2. Cûm modius tritici eſt ſolidorum 15, panis 8 unciarũ venditur 2 denariis: ergo cûm modius erit ſolidorum 20, panis 15 unciarum quanti erit? Hîc rationes 15 ad 20 & 8 ad 15 inter ſe multiplicatæ faciunt rationem 2 ad 5, ſic.

	2	
15	8	2
20	15	5
5		

Nunc ut 2 ad 2 ſic 5 ad 5. quare cûm modius erit ſolidorũ 20, panis 15 unciarum vendetur 5 denariis.

3. Pondo 100, milliaria 20 vehuntur 36 libellis, ergo pondo 50 quot libellis vehentur milliaria 12? Hîc rationes 100 ad 50 & 20 ad 12 inter ſe multiplicatæ faciunt rationẽ 10 ad 3, ſic.

2	5	
$\cancel{100}$	$\cancel{20}$	10
$\cancel{50}$	$\cancel{12}$	3
1	3	

Nunc ut 10 ad 36 ſic 3 ad $10\frac{4}{5}$. Ergo pondo 50 vehentur milliaria 12 libellis $10\frac{4}{5}$.

4. Quindecim ulnæ panni lati $\frac{3}{4}$ væneunt 6 libellis, 40 ulnæ panni lati ulnam $1\frac{2}{3}$ quanti vænibunt? Hîc rationes 15 ad 40 & $\frac{3}{4}$ ad $\frac{5}{3}$ inter ſe multiplicatæ faciunt rationẽ $\frac{9}{4}$ ad $\frac{40}{3}$ ſic.

3		
$\cancel{15}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\cancel{40}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{40}{3}$
8		

Nunc ut $\frac{9}{4}$ ad 6 ſic $\frac{40}{3}$ ad $35\frac{5}{9}$. Ergo 40 ulnæ panni lati ulnam $1\frac{2}{3}$ vendentur libellis $35\frac{5}{9}$.

Exempla proportionis duplæ reciprocæ. 1. Boves 2 jugera 4 arant diebus $23\frac{1}{3}$, boves 7 quot diebus arabunt jugera 3? Hîc datæ rationes 2 ad 7 & 3 ad 4 faciunt rationem 3 ad 14 ſic.

1		
$\cancel{2}$	3	3
7	$\cancel{4}$	14
	2	

Jam vero ut 3 ad 14 ſic 5 ad $23\frac{1}{3}$. Ergo boves 7 arabunt jugera 3 diebus 5. Eandem quæſtionem ſyllogiſmo evidentiore concludes ſic.

Si boves 2 arant jugera 3 diebus $17\frac{1}{2}$, boves 7 arabunt jugera 3 diebus 5.

At ſi boves 2 jugera 4 arant diebus $23\frac{1}{3}$, boves 2 arant jugera 3 diebus $17\frac{1}{2}$.

Ergo ſi boves 2 jugera 4 arant diebus $23\frac{1}{3}$, boves 7 arabunt jugera 3 diebus 5.

2. Duo menſes lucrantur 3 aureos ex 7, quot menſes lucrabuntur 3 aureos ex 4? Vel ſic, 7 aurei duobus menſibus lucran-

lucrantur aureos 3, 4 aurei quot menſibus totidem lucrabuntur? Hìc multiplicatæ rationes 7 ad 4 & 3 ad 3 faciunt rationem 7 ad 4 ſic.

7	3	7
4	3	4

Nunc ut 7 ad 4 ſic $3\frac{1}{2}$ ad 2. Ergo menſes $3\frac{1}{2}$ lucrabuntur 3 aureos ex 4.

3. Duæ vini amphoræ 30 convivis 3 diebus ſufficiunt, tres igitur amphoræ quot convivis diebus 4 ſufficient? Hìc datæ rationes 2 ad 3 & 4 ad 3 inter ſe multiplicatæ faciunt rationem 8 ad 9 ſic.

2	4	8
3	3	9

Jam ut 8 ad 9 ſic $26\frac{2}{3}$ ad 30. Ergo hìc tres amphoræ convivis 26 diebus 4 ſufficient, & adhuc ſupererunt $\frac{2}{3}$ vini ejus quod quis eorum diebus 4 biberet.

De proportione continuata. Cap. XII.

1. H*Actenus de proportione compoſita. Continuata jam ſequitur quæ datarum ſingularum rationum terminos primos inter ſe ſumit, iiſq; ſuperiore ordine locatis inventos minimos continué proportionales ſubjicit.*

Ut in hoc exemplo

2	3	4	5	6	7
16		24		30	35

Hìc datæ rationes ſunt 2 ad 3, 4 ad 5, & 6 ad 7: inventi autem continué proportionales ſunt 16, 24, 30 & 35. Continuatæ veró proportionis explicatio ſic eſt, ut 2 ad 3 ſic 16 ad 24, & ut 4 ad 5 ſic 24 ad 30, & ut 6 ad 7 ſic 30 ad 35. Itaq; hìc termini non in eadem proportione ſed in diverſis continuantur, quod ideó moneo ne quis continuatam proportionem pro continua accipiat.

2. *Minimorum continué proportionalium in datis rationibus inventio ſic eſt. Si minimorum datis ſecũdo & ter-*

tio proportionalium ſecundus primæ rationis terminos, primus ſecundum ſecundæ multiplicet, facti erũt minimi quatuor datis continué proportionales.

Datæ rationes in minimis terminis ſunto rationes 2 ad 9 & 15 ad 4, proportionales ad 9 & 15 minimi ſunto 3 & 5, tumque facti á 2 & 9 per 5 ſunto 10 & 45, & factus á 4 per 3 eſto 12.

2	9	15	4
	3	5	
10	45		12

Dico ut 2 eſt ad 9 ſic 10 eſſe ad 45, & ut 15 ad 4 ſic 45 eſſe ad 12. patet hoc: nam 5 multiplicans 2 & 9 fecit 10 & 45, ideoque per 5 verſ. 6 cap. primi lib. ut 2 ad 9 ſic 10 eſt ad 45. Præterea etiam per theſim & per 6 verſ. 6 cap. primi lib. facti á 9 per 5 & á 3 per 15 æquales ſunt. Sed per theſim factus á 9 per 5 eſt 45. ergo factus á 3 per 15 erit etiam 45: & præterea factus á 3 per 4 eſt 12 ex theſi. ergo per 5 verſ. 6 cap. primi lib. ut 15 ad 4 ſic 45 ad 12. Ampliús dico 10, 45, & 12 eſſe minimos datis proportionales. Secus 10, 45, & 12 aliquẽ multitudinis numerum communem menſuram habebunt, illa eſto 7. hîc primúm per theſim 2 & 9 ſunt primi inter ſe, & facti á 2 & 9 per 5 ſunt 10 & 45. ergo per 6 verſ. 12 cap. primi lib. 5 erit ipſorum 10 & 45 maxima communis menſura; ideoque per 3 verſ. 15 cap. primi lib. 7 metitur 5. Præterea ex concluſo facti á 3 per primos inter ſe 15 & 4 ſunt 45 & 12. ergo ut ſuprá 7 metietur 3. Quare multitudinis numerus 7 metietur 3 & 5 primos inter ſe ex theſi. At hoc eſt contra 6 verſ. 11 cap. primi libri.

Teſtator uxore prægnante ita teſtatus eſt: ſi mihi filius natus fuerit, ex beſſe hæres eſto, ex reliqua parte uxor hæres eſto: ſi filia mihi nata fuerit, ex triente hæres, ex reliqua parte uxor hæres eſto. Jam filiis duobus & filia mortuo teſtatori natis familiæ herciſcũdæ quæſtio eſt, nempe quãta matris, quanta cujuſque liberorum pars ex voluntate defuncti futura ſit quæritur.

quæritur. Hîc minimi datis rationibus 2 ad 1, & 2 ad 1 continué proportionales per proximum verſiculum ſunt 4, 2 & 1.

2 1 | 2 1 |
4 2 1 |

Quibus ſignificatur cúm quiſq; filiorum 4 ceperit, tunc matrem 2, filiam 1 recté accipere. ſi igitur hæreditas aureorum 1560 fuerit, hæredum partes per regulam ſocietatis ita concludentur.

	4	$567\frac{3}{11}$
11 accipiunt 1560.	2	$283\frac{7}{11}$
Ergo	1	$141\frac{9}{11}$

3. Rurſum ſi minimorum tertio facto & tertiæ rationis antecedenti proportionalium, ſecundus jam factos, primus tertiæ rationis conſequentem multiplicet, facti erunt minimi ſex datis continué proportionales: & ſic de pluribus in infinitum.

Suprà diximus ut 2 eſt ad 9 ſic 10 eſſe ad 45, & ut 15 ad 4 ſic 45 eſſe ad 12. Datæ rationes fuerant ratio 2 ad 9 & ratio 15 ad 4: nunc faciamus eas eſſe 2 ad 9, 15 ad 4, & 18 ad 29. Deinde minimi datis 12 & 18 proportionales ſunto 2 & 3. Item facti á 3 per 12, 45, & 10 ſunto 36, 135 & 30. factus autem á 2 per 29 eſto 58.

2 9 | 15 4 | 18 29
10 45 12
2 3
30 135 36 58

Dico ut 2 eſt ad 9 ſic 30 eſſe ad 135, & ut 15 ad 4 ſic 135 eſſe ad 36, & ut 18 ad 29 ſic 36 eſſe ad 58. harum proportionũ demonſtrationes proximis ſuperioribus eædem ſunt. Ampliús dico 30, 135, 36 & 58 eſſe minimos. Secus habebunt communem multitudinis menſuram quæ metietur primos inter ſe 2 & 3. Nam primúm 2 metitur 36 & 58 per primos inter ſe 18 & 29. ideoque multitudinis menſura metietur 2 per 6

verſ. 12 cap. primi lib. & per 3 verſ. 15 cap. eiuſdem. Deinde 3 metitur 30, 135, & 36 per 10, 45, & 12 etiam primos inter ſe. ergo per 6 verſ. 12 cap. primi lib. & per 5 verſ. 15 cap. eiuſdem lib. prædicta multitudinis menſura metietur quoque 3.

Legatariis 4 aurei 500 ita legati ſunt, ut cúm primus 2 ceperit ſecundus capiat 4, cúm ſecundus 6 tertius 8, cúm tertius 10 quartus 12 capiat. Dic ſingulorum partes. R. hîc per 1 verſ. hujus cap. pro 2 & 4, 6 & 8, 10 & 12, ſumo 1 & 2, 3 & 4, 5 & 6. Jam per proximum verſiculum minimi datis continué proportionales ſunt 15, 30, 40, 48. quibus ſignificatur cũ primus 15 ceperit, tum ſecundum 30, tertium 40 & quartum 48 recté accipere. Harum autem partium ſumma eſt 153. quare per primam regulam ſocietatis, legatariorum partes ſic concludo.

	15	$56\frac{52}{133}$
	30	$112\frac{104}{133}$
153 dant 500. ergo	40	$150\frac{50}{133}$
	48	$180\frac{60}{133}$

De proportione continua in tribus terminis tantúm. Cap. XIII.

1. Continuæ proportionis doctrina modó in tribus tantúm terminis, modó in pluribus conſideratur. In tribus tantúm terminis primó inventio continué proportionalium medii tertiique, deinde integrorum multitudinis proprietas quædam eſt.

2. Inventio medii proportionalis ſic eſt. ſi factum á duobus tertius per ſe diviſerit, diviſor erit medius ipſis duobus proportionalis.

Factus á 4 per 9 eſto 36, quem 6 diuidat per 6. hîc per 10 verſ. 6 cap. primi lib. ut 4 ad 6 ſic 6 eſt ad 9.

3. Inven-

3. *Inventio tertii proportionalis duplex eſt. Prima: ſi primus diviſerit factum á ſecundo, quotus erit iis tertius proportionalis.*

Dati ſunto *6* & *10* & facti á *10* diviſi per *6*, quotus eſto *16* $\frac{4}{6}$. hîc per *7* verſ. *6* cap. primi lib. ut *6* ad *10* ſic *10* ad *16* $\frac{4}{6}$.

4. *Secunda: ſi ſecundi quotum diviſi per primum ſecundus multiplicet, factus erit datis tertius proportionalis.*

Dati ſunto *4* & *8*, tumque ſecundi *8* diviſi per primum *4* quotus eſto *2*, & ſecundus quotum multiplicans faciat *16*. hîc per *3* verſ. *6* cap. primi lib. ut *4* ad *8* ſic *8* erit ad *16*.

5. *Proprietas integrorum multitudinis ſic eſt: ſi tres integri multitudinis ſint continué proportionales, primus & medius, itemque medius & tertius erunt compoſiti inter ſe.*

Sunto continué proportionales *4*, *6*, *9*. dico *4* & *6*, itemq; *6* & *9* eſſe compoſitos inter ſe. Nam ſi *4* & *6* eſſent primi inter ſe, factus á *6* per ſe eſſet primus ad *4* per *4* verſ. *14* cap. primi lib. Sed hoc eſſet contra *2* verſ. hujus cap. factus enim á *6* per ſe eſt factus á *4* per *9* per *2* verſ. hujus cap. Idem dicendum de *6* & *9*. Quare ſi duo numeri ſint primi inter ſe, non habebunt tertium proportionalem.

De ratione duorum primorum ad rationem extremorum & de inventione continué proportionalium. Cap. XIII.

1. *IN quotlibet continué proportionalibus cõſideratur primúm ratio duorum primorum ad rationem extremorum, deinde inventio continué proportionalium & ſummæ terminorum.*

2. *Rationum comparatio præcedit. Si é numero termi-*

norum unitatem tollas, ratio primi ad ſecundum multiplicata cognominis reliquo erit ratio primi ad ultimum.

Progreſſio terminorum *5* eſto *2, 4, 8, 16, 32.* & *5+1* eſto *4.* hîc per ſcholium *7* verſ. *1* cap. hujus lib. & per *4* verſ. *18* cap. *1* lib. ratio *2* ad *4* quadruplicata eſt ratio *2* ad *32.*

Rationem duplicare, triplicare, quadruplicare non eſt rationem eandem bis, ter, aut quater poſitam addere ut vulgus exiſtimat, ſed eam continué in ſeſe bis, ter, quater poſitã multiplicare: ſive iidem, ſive diverſi ſint ejuſdẽ rationis termini, nihil intereſt. Ratio *3* ad *1* bis, ter, quater poſita, ſibi ipſi addita eſt *6, 9, 12.* At eadem ratio bis, ter, quater poſita, continué in ſeſe multiplicata eſt *9, 27, 81.* Quid ita? quia, inquã ego, in additione, ſumma additis ut totum ſuis partibus æquatur: at in multiplicatione ut unitas ad alterum multiplicantium ſic reliquus eſt ad factum.

3. Inventio continué proportionalium progreſsionẽ aut datam conſiderat, aut quæſitã invenit: illic unicus terminus in data progreſsione, hic multi in data ratione inveniuntur.

4. Inventio cõtinué proportionalis in data progreſsione ſic eſt. Si primus infinitæ progreſsionis terminus ſequentium aliquem diviſerit, factus á quoto per quemlibet datorum erit datæ progreſsionis terminus.

Progreſſio infinita eſto *3, 6, 12, 24, 48.* tumq; quotus é *12* per *3* eſto *4*, qui *4* per quem libuerit é datis multiplicetur. dico factum eſſe datæ progreſſionis terminum. Hîc enim quotus *4* aut per ipſum *12*, aut per alium é datis multiplicatus fuerit. ſi per ipſum *12*, tunc per *4* verſ. *13* cap. & per *2* verſ. hujus cap. ratio *12* ad factum erit ratio *3* ad *6* duplicata, & ſic factus tertius á *12* in data progreſſione futurus eſt. Rurſum ſi quotum *4* per alium quám per *12* putá per *24* multiplicaueris, tunc ut *3* ad *12* ſic per *3* verſ. *6* cap. primi lib. *24* ad factum á *4* per *24.*

ergo per

ergo per 2 verſ.hujus cap.ratio 24 ad factum erit ratio 3 ad 6 duplicata. factus igitur tertius á 24 in data progreſſione futurus eſt. *Itaque hîc*

5. *Si terminis datæ progreſſionis ſui numeri ordine reſpondeant, ſiquidem quotus diviſum multiplicaverit, duplum numeri multiplicato reſpondentis uno minús erit facti numerus.* ut hîc

1	2	3	4	5	6	7	|	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64	|	3	6	12	24	48	96
			$\frac{8}{64}$				|			$\frac{4}{48}$			

6. *At ſi quotus alium á diviſo multiplicaverit, ſumma numerorum diviſo & multiplicato reſpondentium, uno minús erit facti numerus.* ut hîc

1	2	3	4	5	6	7	|	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64	|	3	6	12	24	48	96
		4		$\frac{4}{64}$			|				4	$\frac{4}{96}$	

Horum duorum verſiculorum uſus ſingularis eſt in Algebraica multiplicatione & diviſione.

7. *Inventio continué proportionalium in data ratione terminos datæ rationis, primos inter ſe multitudinis numeros ſumit.* *Hoc poſito,*

8. *Si datæ rationis antecedens quidem ſeipſum & conſequentem, conſequens autem ſeipſum multiplicet, tres facti erunt minimi continué proportionales in data ratione.*

Datæ rationis 2 ad 3 termini primi inter ſe ſunto, tumq; facti á 2 per 2 & 3 ſunto 4 & 6, itemq; factus á 3 per ſe eſto 9.

2 3

4 6 9

Hîc per 5 verſ. 6 cap. primi lib. ut 2 ad 3 ſic 4 ad 6 & ſic 6 eſt ad 9. Deinde 4, 6, & 9 ſunt primi inter ſe, quia 4 & 9 ſunt pri-

mi inter ſe per 6 verſ. 14 cap. primi libri.

9. *Deinde ſi facti multiplicentur per datum antecedentem, denuoq; ultimus per datum conſequentem, quatuor facti erunt minimi continué proportionales in data ratione, & ſic de pluribus.*

Proximum exemplum repetatur.

	2		3
4		6	9

Tumq; factiá 2 per 4, 6, & 9 ſunto 8, 12, 18. denuoq; factus á 9 per 3 eſto 27.

	2	3	
	4	6	9
8	12	18	27

Hîc quia 4, 6, & 9 ſunt proportionalés in data ratione, ideo per theſim & per 5 verſ. 6 cap. primi lib. ut 2 ad 3 ſic 8 ad 12, & ſic 12 ad 18, & ſic 18 ad 27. præterea 8 & 27 ſunt primi inter ſe per 6 verſ. 14 cap. primi lib.

De ſummæ terminorum continué proportionalium inventione. Cap. XV.

INventio ſummæ terminorum continué proportionalium jam ſequitur. Si ſublato primo termino á ſecundo & ultimo fuerit ut reliquus ſecundi ad primum ſic reliquus ultimi ad inventum, ſumma inventi & ultimi erit ſumma terminorum datæ progreſſionis.

Ut 32 ad 48 ſic 48 ad 72, & ſic 72 eſto ad 108. item 48–32 & 108–32 ſunto 16 & 76.

	16		76
32	48	72	108
	32		32

Item

Item ut 16 ad 32 ſic per 3 verſ. 6 cap. primi lib. 76 eſto ad 152.

16 32 76 152

Dico 152 + 108 eſſe ſummam é 32, 48, 72 & 108. Etenim 72 – 48 & 108 – 72 ſunto 24 & 36. Hîc primùm ex theſi 32 – 16 ſunt 48. Deinde per fabricam 48 – 24 ſunt 72 & 72 – 36 ſunt 108. ergo 32 + 16 + 24 + 36 ſunt 108. item ex theſi 32 + 76 ſunt 108. ergo ſubductione æqualium ab æqualibus 16 + 24 + 36 erunt 76. Jam ex theſi ut 32 eſt ad 48 ſic 48 eſt ad 72. ergo per 8 verſ. 8 cap. vt 48 – 32 ad 32 ſic 72 – 48 ad 48, hoc eſt per theſim & fabricam ut 16 ad 32 ſic 24 ad 48, & ob eaſdem cauſas ſic 36 ad 72: nam ex theſi ut 72 ad 108 ſic 48 ad 72. ergo per 8 verſ. 8 cap. &c. Jam per 5 verſ. 8 cap. ut 16 ad 32 hoc eſt per theſim ut 76 ad 152 ſic omnes antecedentes 16, 24, & 36, ad omnes conſequentes 32, 48, & 72. & alterné ut 16, 24, 36, ſunt ad 76 ſic 32, 48, 72 ſunt ad 152. Sed ex ſuprà concluſo 16, 24, & 36 ſunt 76. ergo 32, 48, & 72 erunt 152. ergo per additionem æqualium ad æquales 152 & 108 erunt 32, 48, 72 & 108.

Pater ſilio pro xeniis dat primo anni die 1 den. ſecundo 3, tertio 9, & deinceps ei quotidie reliquo menſe Januario xenia triplicat: quæro quanta xeniorum ſumma futura ſit? Hîc primùm menſis Januarius dies habet 31 pro numero terminorum datæ progreſſionis.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	*3*	*9*	*27*	*81*	*243*	*729*	*2187*	*6561*

Deinde ſumma numerorum 8 & 9 eſt 17, & termini iis reſpondentes ſunt 2187 & 6561. à quibus factus eſt 14348907 pro decimo ſexto progreſſionis termino. Item factus à 14348907 per ſe ipſum eſt 205890332094649 pro trigeſimo primo ꝓgreſſionis termino. Nunc 3 – 1 & 205890332094649 – 1 ſunt 2 & 205890332094648. Præterea ut 2 ad 1 ſic 205890332094648 ad 102945166047324. Ergo 205890332094648 + 102945166047324 hoc eſt 308835498141972 eſt quæſita xeniorum ſumma.

De diſproportione. Cap. XVI.

1. *EXplicata hactenus proportione ſupereſt diſproportio, quæ eſt quando comparationum in quantitate qualitates diverſæ ſunt.*

Qualitates diverſæ intelliguntur vel differentiæ diverſæ vel rationes diverſæ. Cæterúm doctrinam hîc multam non video, ideoq; etiam hanc partem pleriq; prætermittunt. Sunt tamen & vulgo uſurpantur ejus axiomata quædam, cujus generis illa ſunt.

2. *Si duo numeri inæquales ſint, ratio majoris ad tertiũ ratione minoris ad eundem major erit.*

Sic in datis 5, 3, & 2, ratio 5 ad 2 ratione 3 ad 2 major erit. quare é duobus inæqualibus numeris qui majorem rationẽ ad tertium habuerit, major erit. *Item.*

3. *Si idem numerus cum duobus inæqualibus comparetur, ratio comparati ad minorem, ratione ejuſdem ad majorem major erit.*

Sic ſi 5 cum 2 & 3 conferas, ratio 5 ad 2 ratione 5 ad 3 major erit. Quare ſi idem numerus cum duobus inæqualibus comparetur, is ad quem comparatus majorem rationem habuerit, minor erit.

LIBRI II. FINIS.

Sequitur tabula ſecundæ partis Arithmeticæ.

BERNARDI SALIGNACI BVRDEGALENSIS ALGEBRÆ LIBRI DUO.



FRANCOFURTI
Apud Andream Wechelum,
M D LXXX.

BERN. SALIGNACI BVRDEGALENSIS ALGEBRÆ LIBER I.

De definitione & diviſione Algebræ deque Algebraica notatione. Cap. I.

1. ALGEBRA *eſt numerorum figuratorum Arithmetica.*

Generaliter figuratos accipio omnes numeros quos Algebra tractat. Sunt autem ii figurati aut abſoluti, quemadmodum numeros dicimus eſſe unitatem aut numeros. Sic enim ſpeciei nomen generis κατ' ἐξοχὴν tribuitur. Figurati igitur proprié sũt qui geometricis nominibus appellãtur, ut 1l. 2q. l7. lc8. unum latus, duo quadrati, latus quadrati 7, latus cubi 8. Contrá abſoluti ſunt qui abſq; hujuſmodi nominibus dicuntur, ut 1, 2, 3, 4, 5.

2. *Algebræ partes duæ ſunt. Prima Algebraicam notationem & numerationem docet. Notatio eſt notarum & ſignorum Algebraicorum explicatio.*

Numeris enim vulgaribus Algebra certas notas, certaque ſigna adjungit, quibus ignoratis fruſtra in ea laboratur.

3. *Notæ igitur Algebraicæ cum ſuis indicibus progreſſioni Geometricæ ab unitate reſpondentes ſic ſunt.*

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.
U.	l.	q.	c.	bq.	ſ.	qc.	βſ.	tq.	bc.	ſq.	γſ.	bqc.
O.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.

8192.	16384.	32768.	65536.	131072.	262144.	524288.	1048576.
δſ.	βſq.	ſc.	qq.	εſ.	qbc.	ζſ.	ſbq.
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

Progreſſio Geometrica ab unitate, cujuſcunq; ſubmultiplæ rationis hîc fuerit, nihil intereſt. Ideo autem progreſſionem rationis ſubduplę ſumimus, quia omnium breviſſima & facillima eſt. Cæterúm é notis propoſitis prima dicitur Unitas, ejuſq; index circulus eſt quo ſignificatur abſolutos quidē numeros nō proprié figuratos eſſe, ſed tamē ad eos pertinere, quia eorum explicationes ſunt. Cæteræ notæ figuratorum numerorum nomina ſunt, quorum inter ſe ordo continua numerorum ſerie ab unitate demonſtratur. Primus igitur figuratus, ſeu figurati cujuſvis principium, latus dicitur, ſecundus quadratus, 3 cubus, 4 biquadratus, 5 ſolidus, 6 quadraticubus, 7 ſecundus ſolidus, 8 triquadratus, 9 bicubus, 10 ſolidi quadratus, 11 tertius ſolidus, 12 biquadraticubus, 13 quartus ſolidus, 14 ſecundi ſolidi quadratus, 15 ſolidi cubus, 16 quaterquadratus, 17 quintus ſolidus, 18 quadrati bicubus, 19 ſextus ſolidus, 20 ſolidi biquadratus. Qui figurati etſi progreſſione infiniti eſſe poſſunt, raró tamen in æquationibus, hoc eſt in vero ipſorum uſu, ſupra ſextum ipſorum numerum uſurpantur. Atq; hîc notabis ſolidum dici ſecundum tertiumque, non biſolidum aut triſolidum, ſicut biquadratum & triquadratum, bicubum & tricubum vulgó dicimus. In biquadrato enim & bicubo latus quadrati aut cubi bis continué, in triquadrato & tricubo latus quadrati & cubi ter continué eodem modo erui poteſt, at in ſecundo, tertio, quartoque ſolido latus ſolidi ſemel tantúm eruitur: &, quod in primis notandum eſt, alia eſt analyſis primi ſolidi, alia ſecundi, alia tertii.

4. *Si numeri propoſitis notis præponuntur, præpoſiti figuratos numerant.*

Ut hîc

Ut hîc 1l, 2q, 3c, unũ latus, duo quadrati, tres cubi: $\frac{3l}{5}$, $\frac{4}{7q}$, $\frac{7c}{8bq}$ $1\frac{7}{8}$l, $3\frac{4}{9}$q, $5\frac{7}{8}$bq: tres quintæ lateris, ſeu tria latera diviſa per 5, 4 diviſa per 7 quadratos, 7 cubi diviſi per 8 biquadratos, unũ & ſeptem octavæ lateris, tria & quatuor nonæ quadrati, quinque & ſeptem octavæ biquadrati.

5. Sin poſtponuntur, poſtpoſiti figuratorum valorem explicant.

Ut hîc l2, lc8, lbq16, latus quadrati 2, latus cubi 8, latus biquadrati 16: ubi notabis latus ſimpliciter ſcriptum quadrati latus intelligi.

6. Si figuratorum latera numero explicari poſſunt, figurati rationales dicuntur: ſin contrá, irrationales, eorumq; latera, præpoſita ipſis figuratis nota ſignificantur.

Latus quadrati 4 eſt 2, latus cubi 27 eſt 3, latus biquadrati 625 eſt 5: ergo quadratus 4, cubus 27, & biquadratus 625 figurati ſunt rationales. At contrá quadrati 2, cubi 4, biquadrati 7 latera numero explicari non poſſunt: ergo quadratus 2, cubus 4, biquadratus 7 figurati ſunt irrationales, eorumq; latera ſic notantur, l2, lc4, lbq7, latus quadrati 2, latus cubi 4, latus biquadrati 7: cujuſmodi latera vulgò ſurda dicimus, quia eorum explicatio á nobis audiri nequit. Sic ſurdam buccinam & ſurdos ictus dicimus, qui difficulter & obſcuré audiuntur. Hactenus de notis, ſignorum explicatio ſequitur.

7. Numeri Algebraici ſignis modó pluris, modó minoris componuntur.

Signum pluris ſic eſt + minoris ſic —. Illud affirmat, hoc negat, & quoties poteſt affirmato poſtponitur: deniq; numerus in principio abſq; ullo ſigno poſitus affirmat⁹ intelligitur.

8. E duobus, tribus, quatuor aut pluribus numeris cõpoſiti binomii, trinomii, quadrinomii aut multinomii dicuntur.

Compoſitorum appellatio é nominum multitudine ſic eſt: 2l+4, l2+4, 2l−5, l8−l7 binomii ſunt: item 3+5l+6c, l7+lc8−lbq 9−lſ12, illum trinomium, hunc quadrinomium dicimus. Sed binomii utraque parte affirmati generali nomine binomii, ſecunda parte negati ſpeciali nomine reſidui dicuntur. Sic l2+4 binomium, at l2−4 reſiduum dicimus.

De ſignorum numeratione. Cap. II.

1. NUmeratio Algebraica partim in ſignis, partim in notis Algebraicis conſiſtit. Additio in iiſdem ſignis facit idem ſignum.

Ad 7 cubos adde 8 c, totus erit 15 c. Ad l 4−3 adde l9−5, totus erit 5−8.

2. At in diuerſis additio ſubductio eſt, cujus reliquus ſi quis ſit cum ſigno maioris numeri ſcribitur.

Ad 7l adde −9l, totus erit −2l. Ad lc8+9 adde lc27−10, ſumma ex iis erit 5−1.

3. Subductio in iiſdem ſignis, ſi tollendus non ſit maior, facit idem ſignum: ſin contrá minore ſublato é majore reliquũ notat cum ſigno oppoſito.

E 7q tolle 3q, reliquus eſt 4q. E lc27−6 tolle lc8−2, reliquus eſt 1−4. At tollendus eo á quo ſubductio fit major eſto, exempli gratia é 3bq tolle 5bq, reliquus erit −2bq. ſic impoſſibili propoſito quod poſſibile eſt facimus; ita tamẽ ut quemadmodum in additione ſummam additis, ſic in ſubductione terminum á quo ſubductio fit ſubducto & reliquo ſemper æquemus. E lbq16+2 tolle lbq625+1, reliquus erit 1−3.

4. At in diverſis ſignis ſubductio additio eſt, cujus totus cum ſigno termini á quo ſcribitur.

E 7l tolle −4l, reliquus erit 11l. E lc216+4 tolle lc729+2, reliquus erit 6−3.

5. *Preterea*

5. *Præterea in ſubductione ſi terminus á quo ſui nominis ſolus ſit, ſubſcribetur cum ſuo ſigno: ſin tollendus, cũ oppoſito.*

Eſto ubi terminus á quo ſui nominis ſolus ſit, exempli gratia é 14c + 9q tolle 9c, reliquus erit 5c + 9q. E lbq16 − 5 tolle lbq1, reliquus erit 1 − 5. Contrá eſto ubi tollendus ſui nominis ſolus ſit, putá é 50ſ tolle 30ſ − 2c, reliquus erit 20ſ + 2c. E lſ243 tolle lſ32 + 4, reliquus erit 1 − 4.

6. *Proportionata numeratio in iiſdem ſignis facit plus, in diverſis minus.*

Multiplica 4l per 2l, facies 8q. multiplica 8q − 9 per 8q − 9, facies 64bq + 81 − 144q.

Divide l24 − 8 per l6, quotus erit 2 − l10$\frac{2}{3}$.

De notarum numeratione in genere, deinde de prima æquata & quidem integrorum. Cap. III.

1. N*Otæ Algebraicæ numeris interdum præponuntur, interdum poſtponuntur. Numeratio hic prima, illic ſecunda dicitur. Utraq; integrorum aut partium, ſimplicium aut compoſitorum futura eſt.*

Integrorum numeratio partium numeratione facilior eſt, ideoq; illa hanc ſemper antecedet: & quidem ita ut in utriſq; numeratio ſimplicium numeratione compoſitorum ſemper prior ſit: ſic enim á facilioribus ad difficiliora erit progreſſio. Præterea in partium numeratione prima unum quid generale video. In partibus enim ſicut in integris, terminorum ſimplicium & compoſitorum analogia ſemper eadem eſt. Itaq; in numeratione prima, partibus terminorum compoſitorum ſigillatim ſumptis ſive totus ſuperior numerus toti inferiori primus ſit, ſive numerus abſolutus intercurrat, nulla numerorum aut notarum reductio futura eſt. Exempli cauſa partes ſigillatim ſumptæ ſunto, ut $\frac{8q + 7l}{6c - 12}$. In hoc exemplo 8 ad

6 & 12 compoſitus eſt, ſed nullus numerus multitudinis dividit numeros 8,7,6 & 12: ergo reductio numerorum hîc nulla erit. Item in eodem exemplo notæ l, q, & c reduci ad minores poſſunt, ſed notæ l, q, c & o ad minores reduci nequeunt: ergo quia hîc numerus abſolutus intervenit notarum reductio nulla erit. Hæc in omni partium compoſitarum numeratione prima ſive æquata, ſive proportionata, locum habent. Horum igitur generaliter memineris, ut rem alioqui difficilem & prolixam brevem & facilem legitimé facias.

2. *Prima æquata numeratio datos homogeneos numerat, heterogeneos copulat: inventos autem datis cognomines facit.*

Additio integrorum ſimplicium.

Ad 8q adde 9q, totus erit 17q. Ad 5l adde 30, totus erit 5l+30.

Additio integrorum compoſitorum.

5q+3l	6q+8l	10bq+4l+8
7q+6ſ	4q−4l	6bq−4l−4
12q+3l+6ſ.	10q+4l	16bq —+— 4

Subductio integrorum ſimplicium.

E 5q tolle 7q, reliquus eſt −2q. E 5l tolle 2, reliquus eſt 5l−2.

Subductio integrorum compoſitorum.

4q−9l−4	5bq−3q	1bſ−1qc+3ſ
12q−9l	14bq+9q	8bſ+9qc+11ſ
8q+4	9bq+12q	7bſ+10qc+8ſ.

De prima numeratione proportionata & quidem integrorum. Cap. IIII.

1. P*Rima proportionata numeratio etiam heterogeneos numerat, & inventi notam per æquatam indicum numera-*

merationem demonſtrat.

Hujus demonſtrationis cauſam repetes é 5 & 6 verſ. 14 cap. 2 lib. meæ Arithmeticæ.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.
U.	l.	q.	c.	bq.	ſ.	qc.	bſ.	tq.	bc.	ſq.	tſ.
O.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

Multiplicandus eſto cubus in ſeſe hoc eſt multiplicandus eſto 8 in ſeſe: hîc duplum indicis 3 hoc eſt 6 demonſtrabit propoſitę multiplicationis factum per 5 verſ. 14 cap. 2 lib. meę Arithmeticæ, & ſic propoſitæ multiplicationis factus erit qc. Multiplicandus eſto q per bq, hoc eſt 4 per 16 hîc ſumma indicum 2 & 4 hoc eſt 6 indicabit propoſitæ multiplicationis factũ per 6 verſ. 14 cap. 2. lib. meæ Arithmeticæ, & ſic propoſitæ multiplicationis factus erit qc. Subductio igitur indicum, diviſionem quoq; figuratorum oſtendat neceſſe eſt: viam enim Athenis Thebas, viam Thebis Athenas dicimus. Quare prima proportionata numeratio inventi notam per æquatã indicum numerationem demonſtrabit.

Multiplicatio integrorum ſimplicium.

8q	7c	9l
8q	5qc	10
64bq	35bc	90l

Multiplicatio integrorum compoſitorum.

8q−9	8q+−9
8q−9	8q—9
−72q+81	64bq−81
64bq−72q	
64bq—144q+81	

Cauſa hujus compẽdii eſt, quia hîc complementorũ additio eſt æqualis ab æquali ſubductio.

Q

9q+−8——3l
7c—4bq−8q
−72bq−64q+24c
36qc−32bq+12ſ
63ſ+56c−21bq
75ſ+80c−36qc−125bq−64q.

Diviſio integrorum ſimplicium.

Divide 9l per 3, quotus erit 3l. Divide 15c per 3c, quotus erit 5. Divide 7c per 5q, quotus erit $1\frac{2}{5}$l vel ſi partes omnes mavis $\frac{7l}{5}$. Divide 7q per 5c, quotus erit $\frac{7q}{5c}$ vel per notarū reductionem $\frac{7}{5l}$. nam ſic notarum reductio ſubductione minoris á majore fieri ſolet. Itaq; ſi 9l diviſeris per 10l, quotus erit $\frac{9}{10}$.

Diviſio integrorum compoſitorum.

3l) 9q+4l (3l+$\frac{4}{3}$ | 4l) 28bq−12q ($4\frac{1}{2}$c−3l
9q+4l | 28bq−12q

7c−4q) 14bq−8ſ (2l | 4l−3) 12q−9l (3l
14bq−8ſ | 12q−9l

In his exemplis termini diviſoris terminis dividendi tum numeris, tū notis proportionales fuerunt, & ideó diviſio proceſſit. Secus diviſio linea inter dividendum & diviſorem interjecta fieret, ut hìc. Divide 2c−6 per 2c−2, diviſio ſic erit: $\frac{2c-6}{2c-2}$ vel per reductionem numerorum ſic $\frac{1c-3}{1c-1}$ hìc notæ inter ſe proportionales fuerunt, at numeri non fuerunt. Divide 14bq−8l per 7c−4ſ, diviſio ſic erit $\frac{14bq-8l}{7c-4ſ}$ vel per reductionē notarum ſic $\frac{14c-8.}{7q-4bq}$ hìc numeri inter ſe proportionales fuerunt, notæ non fuerunt, & ideó diviſio interjecta inter diviſorem & dividendum linea facienda fuit. His ita perceptis explicari integra per proportionem poſſunt, ut, 3q valent

valent 9, ergo 7c valebũt 21l. 6bq valent 8, ergo 9ſ valebũt 12l.

De prima æquata partium numeratione.

Caput V.

Additio partium ſimplicium.

Ad $\frac{5q}{9}$ adde $\frac{7q}{9}$ totus erit $\frac{12q}{9}$. Ad $\frac{6}{7l}$ adde $\frac{3}{7l}$ totus erit $\frac{9}{7l}$. Ad $\frac{5q}{9}$ adde $\frac{4}{9}$ totus erit $\frac{5q+4}{9.}$

Ad $\frac{5}{9q}$ adde $\frac{4}{9}$ totus erit $\frac{5+4q}{9q.}$

Ad $\frac{2l}{4}$ adde $\frac{3l}{10}$. Hîc ſi numeros ante additionem reducas, additio ſic erit

1l	3l		5l		
$\frac{2l}{4}$	$\frac{3l}{10}$	ad	$\frac{1l}{2}$	totus eſt $\frac{8}{10}$	vel $\frac{4l}{5.}$
2	1		5		
	10				

Si reductionem in finem additionis differas, additio ſic erit

10l		6l		
$\frac{2l}{4}$	ad	$\frac{3l}{10}$	totus eſt $\frac{16l}{20}$	vel $\frac{4l}{5.}$
5		2		
20				

At hoc ſecundum brevius eſt: quare reductio numerorum in finem additionis differetur.

Ad $\frac{2c}{5l}$ adde $\frac{2bq}{3ſ}$. Hîc ſi notarum reductionem in finem additionis differas, additio ſic erit:

6tq		10ſ		
$\frac{2c}{5l}$	ad	$\frac{2bq}{3ſ}$	totus eſt $\frac{6tq+10ſ}{15qc}$	vel $\frac{6c+10}{15l.}$
3ſ		5l		
15qc				

Si notas ante additionem reducas; additio ſic erit:

$$\frac{2\text{rq}}{5\text{r}} \text{ ad } \frac{2\text{bq}}{5\text{ll}} \;\Big|\; \frac{2\text{q}}{5} \text{ ad } \frac{2}{3\text{r}} \quad \text{totus eſt } \frac{6\text{c}+10}{15\text{l}}$$

$$6\text{c} \qquad 10 \qquad\qquad 3\text{r} \quad 5 \qquad\qquad 15\text{l}$$

Atqui hoc ſecundum brevius eſt. Ergo reductio notarum ante additionem facienda.

Additio partium compoſitarum.

$$336-240\text{q} \text{ ad } 336\text{q}$$

$$\frac{48}{7\text{q}} \text{ ad } \frac{48}{7-5\text{q}} \text{ ſumma eſt } \frac{336+96\text{q}}{49-35\text{bq}}.$$

$$7-5\text{q} \qquad 7\text{q} \qquad\qquad 49\text{q}-35\text{bq}$$

$$15\text{ſ}+3\text{c}-45\text{q}-9 \text{ ad } 11\text{qc}+16\text{ſ}+8\text{bq}-11\text{c}-16\text{q}-81$$

$$\frac{15\text{q}+3}{2\text{c}-2} \qquad\qquad \frac{11\text{c}+16\text{q}+81}{2\text{c}-6}$$

$$1\text{c}-3 \qquad\qquad 1\text{c}-1$$

$$2\text{qc}+6-8\text{c}.$$

Horum ſumma eſt $\frac{11\text{qc}+31\text{ſ}+8\text{bq}-8\text{c}-61\text{q}-81-9}{2\text{qc}+6-8\text{c}}$

$$\frac{2\text{l}-\frac{4}{7}}{1\frac{2}{3}} \text{ ad } \frac{4\text{l}-\frac{3}{10}}{2\frac{3}{9}}$$

Hîc ſingulos diviſos cum ſuis diviſoribus primúm ad partes, deinde ad integra reduces: reductio ad partes ſic erit:

$$1\tfrac{2}{3}) \quad 2\text{l}-\tfrac{4}{7} \;\Big|\; 2\tfrac{3}{9}) \quad 4\text{l}-\tfrac{3}{10}$$

$$\tfrac{5}{3}) \quad \frac{14\text{l}-4}{7} \;\Big|\; \tfrac{21}{9}) \quad \frac{40\text{l}-3}{10}$$

Reductio ad integra ſic erit:

$$35 \quad 42\text{l}-12 \;\Big|\; 210 \quad 360\text{l}-27$$

$$\frac{5}{3} \quad \frac{14\text{l}-4}{7} \;\Big|\; \frac{21}{9} \quad \frac{40\text{l}-3}{10}$$

Tum

Tum veró novos diviſores novis dividuis ſubſcribes, ut diviſos ejuſdem nominis facias, ſic:

$$\begin{array}{ccc} 3521-72 & & 3601-27 \\ \dfrac{421-12}{35} & \text{ad} & \dfrac{3601-27}{210} \\ 6 & & 1 \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{210} & \end{array}$$

Deniq; datorum ejuſdem nominis ſumma erit $\dfrac{7121-99}{210}$

Subductio partium ſimplicium.

E $\frac{10l}{9}$ tolle $\frac{8l}{9}$ reliquus erit $\frac{2l}{9}$. E $\frac{7}{159}$ tolle $\frac{4}{159}$ reliquus erit $\frac{3}{159}$ vel $\frac{1}{59}$. E $\frac{99}{16}$ tolle $\frac{5}{16}$ reliquus erit $\frac{99-5}{16}$. E $\frac{7}{109}$ tolle $\frac{3}{10}$ reliquus erit $\frac{7-39}{109}$.

$$\begin{array}{ccc} 10l & & 6l \\ \dfrac{2l}{4} & \text{tolle} & \dfrac{3l}{12} \\ 5 & & 2 \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{20} & \end{array}$$

E $\frac{2l}{4}$ tolle $\frac{3l}{12}$ reliquus erit $\frac{4l}{20}$ vel $\frac{1l}{5}$. hîc ut antea in additione reductio numerorum in finem differtur.

$$\begin{array}{ccc} 6c & & 10 \\ \dfrac{2q}{5l} & \text{tolle} & \dfrac{2q}{3l} \\ 3l & & 5 \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{15l} & \end{array}$$

E $\frac{2q}{5l}$ tolle $\frac{2q}{3l}$ reliquus erit $\frac{6c-10}{15l}$. hîc quoque ut antea in additione reductio notarum numeratione antecedit.

Subductio partium compoſitarum.

E $\frac{9q+8l}{2c-6}$ tolle $\frac{5q+3l}{2c-6}$ reliquus erit $\frac{4q+5l}{2c-6}$.
E $\frac{9l-3}{5\ \ 4}$ tolle $\frac{4l}{15}$. reductione facta tolles $\frac{16l}{60}$ é $\frac{108l-9}{60}$, reliquus erit $\frac{92l-9}{60}$:
E $\frac{10l+9}{8c-6}$ tolle $\frac{5q-7c}{9bq+7}$. reductione facta tolles

$\frac{40ſ + 42c - 56qc - 30q}{72bl + 54bq - 56c - 42}$ ex $\frac{846bq + 90ſ + 70l + 658}{72bl + 54bq - 56c - 42}$

reliquus erit $\frac{846bq + 90ſ + 70l + 658 - 40ſ + 42c - 56qc - 30q}{72bſ + 54bq - 56c - 42}$.

De prima proportionata partium numeratione. Cap. VI.

Multiplicatio partium ſimplicium.

Multiplica $\frac{3l}{5}$ per $\frac{7}{8}$ facies $\frac{21l}{40}$. Multiplica $\frac{10l}{5c}$ per $\frac{7q}{5l}$ reductione facta multiplicabis $\frac{2}{5l}$ per $\frac{7}{c}$ & facies $\frac{14}{5c}$

Multiplicatio partium compoſitarum.

Multiplica $\frac{6q+8}{9l}$ per $\frac{15l}{8}$ reductione facta multiplicabis $\frac{3q+4}{3}$ per $\frac{5}{4}$ facies $\frac{15q+20}{12}$.

Multiplica $\frac{4bq+5l}{7c-8q}$ per $\frac{7c-8q}{3l+4}$ facies $\frac{4bq+5l}{3l+4}$.

Multiplica $\frac{4}{5l}$ 8 per $\frac{7q+8l}{5c-12}$. reductione facta multiplicabis $\frac{4-40l}{5}$ per $\frac{7l+8}{5c-12}$ facies $\frac{32-280q-292l}{25c-60}$.

Diviſio partium ſimplicium.

Divide $\frac{2l}{3}$ per $\frac{8l}{9}$ reductione facta divides 3 per 4, quotus erit $\frac{3}{4}$. Contrá divide $\frac{8l}{9}$ per $\frac{2l}{3}$. reductione facta divides 4 per 3 quotus erit $1\frac{1}{3}$.

Diviſio partium compoſitarum.

Divide $\frac{15q+20}{12}$ per $\frac{6q+8}{9l}$. reductione facta divides 45c + 60l per 24q+32, quotus erit $1\frac{7}{8}$l, vel ſi partes omnes malis $\frac{15l}{8}$.

Divide $\frac{78q+9c}{9l-6ſ}$ per $\frac{486ſ+36bq}{72c+18qc}$ primúm datos terminos reduces ad $\frac{26+3l}{3-2bq}$ & $\frac{8c+6}{12+3c}$, quotus erit $\frac{312+36l+78c+9bq}{24c+18-16bſ-12bq}$. Quare ut antea integrorum figuratorum ſic nunc fractorũ proportio concludi poteſt: $\frac{3}{4l}$ valent $\frac{4}{5}$ ergo $\frac{1}{3c}$ valet $\frac{16}{45q}$.

Item

Item $\frac{2}{31}$ valent $\frac{4}{99}$, ergo $\frac{95}{13}$ valebunt $\frac{69}{13}$.

De ſecunda numeratione, deque quadrati, cubi, & ſolidi analyſi. Cap. VII.

1. N*Umeratio ſecunda ſurdorũm laterum propria terminos tantũm homogeneos numerat, & inventos datis cognomines facit.*

Prima numeratio figuratos tam rationales quàm irrationales numeravit: at ſecunda irrationalium tantũm latera certis legibus numerat. Doctrinæ tamen gratia licebit rationalium latera hac quoq; numeratione numerare: ſic enim lux aliqua á rationalibus ad irrationalia pervenerit. Eruenda autẽ in iſta numeratione ſæpe ſunt figuratorum rationalium latera: ergo tyronum gratia quadrati, cubi & ſolidi analyſim breviter hîc deſcribam.

2. *Quadratus eſt factus á numero in ſeipſum multiplicato. Cubus eſt factus á quadrato in ſuum latus multiplicato. Solidus eſt factus á quadrato & cubo ejuſdem lateris.*

Hæc ſolidi tantũm primi definitio eſt: cæterorum ut analyſes, ſic definitiones propriæ ſunt. Ut autem propoſitarum definitionum exempla quædam ſemper in promptu habeamus, quadrati, cubi & ſolidi é lateribus unius notæ arithmeticæ ſic ſunt:

Latera uni⁹ notę arithmeticæ.	Quadrati.	Cubi.	Solidi.
1	1	1	1
2	4	8	32
3	9	27	243
4	16	64	1024
5	25	125	3125
6	36	216	7776

L.	Q.	C.	S.
7	49	343	16807
8	64	512	32768
9	81	729	59049

Nunc grandiorum quadrati cubi & ſolidi analyſes ſequuntur: ubi tot notę in quoto quot puncta in figurato, & tot complementa inter particulares figuratos quot notæ inter duo puncta comprehendentur, futura ſunt. Sed complementorũ numerus paulo aliter in ipſis figuris habet: in quadrato duo, in cubo tria tum maiora tum minora inter ſe æqualia complementa ſunt. Ergo pro æqualibus complementis illic duobus, hîc tribus, arithmetica unum multis æquale ſumit.

3. *Si grandioris quadrati latus quæratur, tertiis quibuſq; ab ultima notis, pro totidem particularibus quadratis punctum ſubjicies: deinde primi particularis quadrati latus inventum in quoto adnotabis, & adnotatũ pro primi complementi baſi duplicabis: Complemento deniq; per ſuam baſim diviſo, quotus erit latus proximé ſequentis quadrati.*

		1504	
Ut in 9604.	18	9604	(68
	8	81	
	144	1504	

Hîc quia 96 quadratus non eſt, ſumis proximé minorem quadratum 81, cujus latus eſt 9, quod ſcribis in quoto. Deinde 81 ſublatis é ſuperiore numero 96 manent 15: ideoq; complementũ cum ſecundo quadrato erit 1504. Tũ veró latus inventum 9 duplicas, facis 18 pro baſi complementi, cujus baſis ultima nota ſecundæ ab ultima primi quadrati reſpondere intelligitur: quod in baſibus primorum complementorum perpetuum eſt, cujus generis figurati ſint nihil intereſt. Deniq; diviſo complemento 150 per ſuam baſim 18, quotum 8 adſcribis in lunula pro ſecundi quadrati latere. Pro

Pro hujuſmodi fabricæ examine quotum recens inventū in ſeſe & in complementi baſim multiplicas, & factorum homogeneis ſuperioribus reſpondentium ſummam é ſuperiore numero ſubducis. Sic in propoſito exemplo quotum 8 multiplicas in ſeſe, & facis 64 pro ſecundo quadrato: & in complementi baſim 18, facis 144 pro complemento. Iam horum factorum ſuperioribus homogeneis reſpondentium ſumma eſt 1504, quæ ſubducta é ſuperiore numero 1504 nihil relinquit. Ergo ſi multiplicaveris 98 in ſeſe, facies quadratū 9604. Quadrati enim é ſegmentis 90 & 8 cum ipſorum complemēto ſunt partes quadrati é toto 98.

4. *Si quoto duarum aut plurium notarum invento, integrum tamen propoſiti quadrati latus nondum inventum ſit, ad proximi ſequentis inventionem integrum jam inventum quotum duplicabis: de cætero artem ſuperiori prorſus eandem obſervabis.*

Ut in 15129.			729	
	2	24	51	
	2	3	15129	(123
	4	72	28	
			44729	

5. *Si grandioris cubi latus quæratur, quartis quibuſq; ab ultima notis, pro totidem particularibus cubis punctum ſubjicies: deinde primi particularis cubi latus inventum in quoto adnotabis: illudq; pro primi complementi baſi quadratum triplicabis, pro ſecundi complementi altitudine tantúm triplicabis: deniq; primo complemento per ſuam baſim diviſo, quotus erit latus proximé ſequentis cubi.*

Ut in 389017.	147	21	46017	
	3	9	389017	(73
	441	189	343	
	189		46017	
	27			
	46017			

Hîc quia 389 cubus non eſt, ſumis proximè minorem cubum 343, cujus latus eſt 7, quod ſcribis in quoto. Deinde 343 ſublatis è ſuperiore numero 389 manent 46. Itaq; hîc complementa duo cum ſecundo cubo ſunt 46017. Tum veró latus inventum 7 quadras & quadratum triplicas, facis 147 pro primi complementi baſi: denuoq; latus inventum triplicas, facis 21 pro ſecundi complementi altitudine. Diviſo deniq; complemento primo 460 per ſuam baſim 147, quotum 3 adſcribis in lunula pro ſecundi cubi latere.

Pro hujuſmodi fabricæ examine quotum jam inventum cubas, cubique altitudinem quidem in baſim primi complementi, baſim autem in ſecundi complementi altitudinē multiplicas, & factorum homogeneis reſpondentium ſummam è ſuperiore numero ſubducis. Sic in propoſito exemplo quotum 3 cubas & facis 27, cujus cubi altitudo eſt 3, baſis autē eſt 9. Itaque cubi altitudinem 3 in primi complementi baſim 147 multiplicas, facis 441: ſimiliter cubicam baſim 9 in ſecundi complementi altitudinem 21 ducis, & facis 189. Jam horum factorum ſuperioribus homogeneis reſpondētium ſumma eſt 46017, quæ ſumma ſublata è ſuperiore numero 46017 nihil relinquit. Ergo ſi 73 quadres & quadratum in ſuum latus multiplices, facies cubum 389017. Cubi enim è ſegmentis 70 & 3 cum inventis duobus ipſorum complementis ſunt partes cubi è toto 73.

6. *Si quoto duarum aut plurium notarum invento, integrum tamen propoſiti cubi latus nondum inventum ſit, ad proxi-*

proximi ſequentis inventionem, integrum jam inventum quotum pro baſi proximi complementi quadrabis & quadratum triplicabis, artemq; deinde obſervabis quā ſuprá.

Ut in 34012224.

		1244224	3072	96
27	9	7012	4	16
2	4	34012224 (324	12288	576
54	36	27	1536	96
368		5768	64	1536
5768		1244224	1244224	

7. *Si grandioris ſolidi latus quæratur, ſextis quibuſque ab ultima notis punctum pro totidem particularibus ſolidis ſubjicies: deinde primi particularis ſolidi latus inventum in quoto adnotabis, illudq; pro quatuor complementorum baſibus primó biquadrabis & biquadratum quintuplabis, ſecundó cubabis & cubatum decuplabis, tertió quadrabis & quadratum decuplabis, quartó quintuplabis. Deniq; primo complemento per ſuam baſim diviſo quotus erit latus proximé ſequentis ſolidi.*

Ut in 45435424.

Complementorum latera.		Complementa cum ſecundo ſolido.
405	21135424	
4	45435424 (34	1620
270	243	4320
16	21135424	5760
90		3840
64		1024
15		21135424
256		

In hoc exemplo quia 454 ſolidus non eſt, proximé minorē ſolidū 243 ſumis, cujus latus eſt 3, quod ſcribis in lunula: deinde 243 ſublatis é 454 manēt 211: ideoq; hîc complementa quatuor cū ſecūdo ſolido ſunt 21135424. Tum veró latus inventū 3 biquadras & biquadratum quintuplas, facis 405 pro primi complementi baſi. Rurſum latus inventum cubas & cubatū decuplas, facis 270 pro ſecundi complementi baſi. Tertió latus inventum quadras & quadratum decuplas, facis 90 pro tertii complementi baſi. Quartó latus inventum quintuplas, facis 15 pro quarti complementi baſi. Deniq; primum complementum 2113 dividis per ſuam baſim 405, & quotum 4 adſcribis in lunula pro latere ſecundi ſolidi.

Pro hujuſmodi fabricæ examine latus recens inventum ſimplex primi complementi, quadratum ſecundi, cubatum tertii, biquadratū quarti baſim multiplicat, & rurſum ipſum latus ſimplex ſeipſum ſolidat, ut tandem ſumma hujuſmodi factorum ſuperioribus homogeneis reſpondentium é ſuperiore numero ſubducatur. Sic in propoſito exemplo inventum quotum 4 multiplicas per primi complemēti baſim 405, & facis 1620 pro primo complemento. Deinde quoti quadratum 16 multiplicas per ſecundi complementi baſim 270, & facis 4320 pro ſecundo complemento. Tertió quoti cubū 64 multiplicas per tertii complemēti baſim, & facis 5760 pro tertio complemento. Quartó quoti biquadratum 256 multiplicas per quarti complementi baſim & facis 3840 pro quarto complemento. Quintó ipſum quotū 4 ſolidas, & facis 1024 pro ſecundo ſolido. Jam horum factorum ſuperioribus homogeneis reſpondentium ſumma eſt 21135424, quæ ſubducta é ſuperiore æquali nihil relinquit. Ergo ſi quadratum é 34 per ejuſdem lateris cubum multiplicaveris, factus erit ſolidus 45435424. Solidi enim é ſegmentis 30 & 4 cum inventis quatuor ipſorum complementis ſunt partes ſolidi é toto 34.

8. *Si quoto duarum aut plurium notarum invento, integrum*

tegrum tamen propoſiti ſolidi latus nondum inventum ſit, pro quatuor deinceps complementorum baſibus integrum jam inventum quotum primó biquadrabis & biquadratũ quintuplabis, ſecundó eum cubabis & cubatum decuplabis, tertió quadrabis & quadratum decuplabis, quartó quintuplabis: cætera ut ſuprá.

Ut in *403487656379424.*

Complementorum primorum latera.

20480	9583692079424
3	758076563
5120	403487656379424 (834
9	32768
640	662240643
27	9583692079424
40	
81	

Complementa prima cum ſecundo ſolido.

61440
46080
17280
3240
243
662240643

Complementorum ſecundorum latera.

2372916 05
4
5717870
16
68890
64
415
256

Complementa ſecunda cum tertio ſolido.

949166420
91485920
4408960
106240
1024
9583592079424

De ſecunda numeratione æquata & quidem integrorum. Cap. VIII.

1. Secũda numeratio æquata, latera tantúm ſurda invenit.

Hujus cauſa eſt quia hîc irrationalium communis menſura figuratus eſt irrationalis, & facti á rationalibus per irrationales figurati ſunt irrationales.

2. Et ea data ita demum numerat, ſi eorum figurati maxima communi menſura ad minimos ſui generis figuratos reduci poſſint.

Si ita reduci non poſſint, eorum latera hac numeratione non numerabuntur, ſed per ſignum aliquod copulabuntur. Sic additorum l8 & l7 ſummam dices eſſe l8 + l7. ſic ſubducto l7 é l8 reliquum dices eſſe l8 − l7.

3. Hîc tertius é reductorum lateribus inventus multiplicatur primó per ſe pro ſuo genere: deinde per datorum figuratorum maximam menſuram.

Pro ſuo genere, hoc eſt, ſi dati figurati quadrati ſint, inventus quadrabitur: ſi dati ſint cubi aut biquadrati, inventus cubabitur aut biquadrabitur: deinde multiplicabitur per maximam datorum menſuram, ut nimirum hac ſecunda multiplicatione minor figuratus majori optato æquetur.

Additio ſimplicium integrorum in quadratorum lateribus

	Explicatis			Surdis	
	l144 ad	l225		l27 ad	l12
	12	15	l3)	9	4
l9)	16	25		3	2
	4	5		5.	
	9			25	
	81			l75	
	l729.i.27				

In primo exemplo quia ut 16 ad 25 ſic 144 eſt ad 225, ideo erit

erit ut 4 ad 5 ſic 12 ad 15: ideoq; ut 4+5 ad 4 ſic 12+15 ad 12, & alterné ut 4+5 ad 12+15 ſic 4 ad 12. Ergo ut quadratus é 4+5 ad quadratum é 12+15 ſic quadratus é 4 ad quadratum é 12. Sed ex theſi quadratus é 4 eſt $\frac{1}{9}$ quadrati é 12. Ergo quadratus é 4+5 erit $\frac{1}{9}$ quadrati é 12+15. quare latus quadrati 729 hoc eſt 27 erit 12+15. Similis demonſtratio in ſequentibus haberi poteſt.

Exemplum in biquadratorum lateribus

Explicatis

lbq 1296 ad lbq 10000
6 10
lbq 16) 81 625
3 5
8
4096
lbq 65536. i. 16

Surdis

lbq 32 ad lbq 162
lbq 2) 16 81
2 3
5
625
lqb 1250

Exemplum in cuborum lateribus

Explicatis

lc 216 ad lc 512
6 8
lc 8) 27 64
3 4
7
343
lc 2744. i. 14

Surdis

lc 24 ad lc 81
lc 3) 8 27
2 3
5
125
lc 375

Exemplum in bicuborum lateribus

Explicatis

lbc 10077696 ad lbc 134217728
6 8
lbc 512) 19683 262144
3 4
7
40353607
lbc 2066104678 4. i. 14.

Surdis

lbc 78732 ad lbc 2048
lbc 4) 19683 512
3 2
5
1953125
lbc 7812500

Exemplum in ſolidorum lateribus

Explicatis		Surdis	
lſ 7776 ad	lſ 100000	lſ 96 ad	lſ 50421
6	10	lſ3) 32	16807
lſ32) 243	3125	2	7
3	5	9	
8		59049	
32768		lſ177147	
lſ 1048576.i.16			

Additio compoſitorum integrorum.

8+l28	4−l7	4−l 7	l28+lbq32
4+l 7	4−l8	5+l28	l 7+lbq162
12+l63	8−l7−l8	9+l 7	l63+lbq1250

lc 24+lſ32	lbc 78732+−l7
lc 81+lſ3125	lbc 2048+−l8
lc 375+7	lbc 7812500+l7+l8.

Subductio ſimplicium integrorum in quadratorũ lateribus

Explicatis		Surdis	
l 225 de	l 1296	l 27 de	l 75
15	36	l3)	
l9) 25	144	9	25
5	12	3	5
7		2	
49		4	
l 441.i.21.		l 12.	

In primo exemplo quia ut 144 ad 25 ſic 1296 eſt ad 225, ideo erit ut 12 ad 5 ſic 36 ad 15. ideoq; ut 12−5 ad 5 ſic 36−15 ad 15, & alterné ut 12−5 ad 36−15 ſic 5 ad 15. Ergo ut quadratus é 12 −5 ad quadratum é 36−15 ſic quadratus é 5 ad quadratum é 15. Sed per theſim quadratus é 5 eſt $\frac{1}{9}$ quadrati é 15. Ergo quadratus é 12−5 hoc eſt quadratus 49 erit $\frac{1}{9}$ quadrati é 36−15. Quare latus quadrati 441 hoc eſt 21 erit 36−15. Idẽ in ſequentibus exemplis demonſtrari poteſt. Exem-

Exemplum in biquadratorum lateribus

Explicatis	Surdis
lbq 1296 de lbq 10000	lbq 32 de lbq 162
6 10	
lbq 16) 81 625	lbq 2) 16 81
3 5	2 3
2	1
16	1
lbq 256.i.4.	lbq 2

Exemplum in cuborum lateribus

Explicatis	Surdis
lc 216 de lc 1000	lc 24 de lc 81
6 10	lc 3) 8 27
lc 8) 27 125	2 2
3 5	1
2	1
8	lc 3
lc 64.i.4	

Exemplum in bicuborum lateribus

Explicatis	Surdis
lbc 10077696 de lbc 134217728	lbc 2560 de lbc 98415
6 8	lbc 5) 512 19683
lbc 512) 19683 262144	2 3
3 4	1
1	1
1	lbc 5
lbc 512.i.2	

Exemplum in ſolidorum lateribus

Explicatis	Surdis
lſ 7776 de lſ 100000	lſ 96 de lſ 50421
6 10	
lſ 32) 243 3125	lſ 3) 32 16807
3 5	2 7
2	5
32	3125
lſ 1024.i.4	lſ 9375

S

Subductio integrorum compoſitorum.

l 12—5	l 12—12	4—l 48	l 28—lbq2
l 108—9	l 27—8	8—l 27	l 63+lbq32
l 48—4	l 3—+4	4+l 3	l 7+lbq 162

lc 3— 7	lbc 5—+l112
lc 81—lſ3125	lbc 98415+l7
lc 24+lſ32	lbc 2560—l63

De ſecunda numeratione proportionata & quidem integrorum. Cap. IX.

1. *Secunda proportionata numeratio pro figuratorum irrationalium lateribus ipſos figuratos numerat.*

In numeratione æquata latus figurati inventi multiplicati per communem menſuram fuit latus optatum, hic latus inventi figurati latus optatum eſt. Latus enim facti á duobus figuratis homogeneis eſt factus ab ipſorum lateribus, & ſimiliter latus quotié figurato per ei homogeneum diviſo eſt quotus lateris figurati diviſi per latus diviſoris homogenei: patent hæc in figuratis rationalibus. Multiplica quadratũ 4 in quadratum 9, facies quadratum 36, cujus latus 6 eſt factus á latere quadrati 4 per latus quadrati 9. Similiter divide quadratum 36 per quadratum 9, quotus erit 4, cujus latus 2 eſt quotus lateris quadrati 36 diviſi per latus quadrati 9. Numeratio igitur proportionata in figuratis rationalibus per ſe manifeſta, in irrationalibus pro mminné dubia ſumitur.

2. *Ea inventi latus dum poteſt eruit.*

Secunda numeratio æquata inventi latus eruere nunquã poteſt, quia factos a rationalibus per menſuras irrationales ſemper invenit. Secunda proportionata ſæpe illud eruere poteſt: nam & in multiplicatione ſi dati duo irrationales quadrati habeant medium proportionale, eorum medium eſt latus

latus ab iis facti; & in diviſione ſi dividuus irrationalis ſit factus á rationali per homogeneum irrationalem, quotus eſſe poteſt rationalis. Quoties igitur ſecunda numeratio proportionata inventi latus eruere poteſt, illud eruit: ſic enim ignotus numerus nobis innoteſcit.

3. *Et indicum multiplicatione heterogeneorum ad homogeneos reductionem demonſtrat.*

Numeratio æquata heterogeneos terminos rectè copulat: ſummã enim ex additis lc87 & lbq 9 dices eſſe lc87+lbq9: ſi tollendum ſit lc7 è l8 dices reliquum eſſe l8−lc7. Sed in numeratione proportionata pro hujuſmodi copula reductio heterogeneorum ad homogeneos numerationem antecedit, & demonſtratur aut unica aut ſummùm eorundem indicum duplici multiplicatione. Si multiplicandum ſit lc8 per 5, ante multiplicationem cubabis 5: hîc enim pro latere ejus valor dicitur, index autem lateris eſt unitas per 3 verſ. 1 cap. Porró 1 per indicem cubi 3 facit 3, quia unitas multiplicatum non mutat. Si multiplicandum ſit l9 per lbq 16, ante multiplicationem quadrabis 9: quadrati enim index eſt 2 per 3 verſ. 1 cap. ejuſq; quadratus 4 per eundem verſum eſt index biquadrati. Si multiplicãdum ſit l 4 per lc 27, quadratum 4 cubabis & cubum 27 quadrabis: nam duo numeri quovis modo inter ſe multiplicati eundem procreant. Idem in heterogeneorum diviſione dicendum, quia etiam diviſio heterogeneorum nõ niſi hujuſmodi reductione antecedente procedit.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
u	l	q	c	bq	ſ	qc	βſ	tq	bc
O	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Denique hîc notabis inventorum homogeneorum multiplicationem diviſionemque pro datorum heterogeneorum multiplicatione & diviſione accipi, quia hac reductione mu-

tatis figuratis, figuratorũ tamen latera eadem manent. Quare inventorum homogeneorum multiplicatio diviſioq;, erit datorum heterogeneorum multiplicatio diviſioque.

Multiplicatio ſimplicium integrorum.

Multiplica l 20 per l 20, facies l 400 id eſt 20. Quare ſi latus quadrati in ſeſe multiplices, numerus multiplicati erit ipſe factus. Multiplica lbq 8 per lbq 8, facies lbq 64 id eſt l8. Quare ſi latus biquadrati in ſeſe multiplices, numerus multiplicati, præpoſita ei ſimplicis lateris nota erit ipſe factus. Multiplica lc 4 per lc 64, facies lc256. Multiplica lbc 27 per lbc 729, facies lbc 19683.i.3. Multiplica lſ81 in lſ729, facies lſ59049 .i.9.

Heterogeneorum multiplicatio reductione antecedente ſimiliter procedit. Multiplica 2 per l 7, reductione facta multiplicabis l4 per l7, & facies l 28. Itaq; ſi duo quadratorum æqualium latera addenda ſint, quadratorum alter multiplicatus per 4 faciet quadratum duplicati lateris: & ob ſimilem cauſam ſi duo cuborum æqualium latera addenda ſint, cuborum alter multiplicatus per 8 erit cubus duplicati lateris: ſi duo biquadratorum æqualium latera addenda ſint, biquadratorum alter multiplicatus per 16 erit biquadratus duplicati lateris.

Multiplica l 3 in lbq 7, reductione facta multiplicabis lbq 9 in lbq 7, & facies lbq 63. Multiplica l 3 in lc 5, cubabis 3 & quadrabis 5, tumque reductione facta multiplicabis lqc 27 per lqc 25, & facies lqc 675. Multiplica lc 2 per lbq 3, biquadrabis 2 & cubabis 3: tumque reductione facta multiplicabis lbqc 16 per lbqc 27, factus erit lbqc 272.

Multiplicatio integrorum compoſitorum.

6 + l12	6 + l12	l5 — lc7	Terminos tranſ-
6 + l12	6 — l12	lc7 — l5	pones ſic.
l432 + 12	36 — 12		
36 + l432	24		
48 + l1728			

l5—

lſ–lc7
–lſ+lc7
lqc6125–lc49
–ſ+lqc6125
lqc392000–lc49–ſ

lbq8+lſſ
lcſ+l3
lbq72+lſq6075
lbqc 320000+lſc390625
lbqc320000+lſc390625+lbq72
+lſq6075.

Diviſio integrorum ſimplicium.

Divide l48 per l3, quotus erit l16 id eſt 4. Divide lbq8 per lbq 4, quotus erit lbq 2. Divide lc 10 per lc2, quotus erit lc5. Divide lbc 12 per lbc 4, quotus erit lbc3. Divide lſ15 per lſ3, quotus erit lſ5.

Heterogeneorum diviſio reductione antecedente ſimiliter procedit. Divide l24 per 2, reductione facta divides l24 per l4, quotus erit l6. Divide l6 per lbq3, reductione facta divides lbq36 per lbq3, quotus erit lbq 12. Divide l12 per lc4, cubabis 12 & quadrabis 4: & deinde reductione facta divides lqc 1728 per lqc 16, quotus erit lqc 108.

Diviſio integrorum compoſitorum.

Divide 8 + l20 per 2, quotus erit 4+l5. Divide lc7 – l24 per 3, quotus erit lc$\frac{7}{27}$ – l2$\frac{2}{3}$. Divide 48 + l432 + l384 + l72 per 8 + l12, quotus erit 6 + l6. Sed & hujuſmodi diviſionem reductio datorum ad alios proportionales ſæpe antecedit. Divide 23 + l448 per 4 – l7. Hîc primum dati per diviſorem mutato ſecundæ partis ejus ſigno multiplicabuntur ſic.

4 – l7
4 + l7
16 – 7 id eſt 9.

23 + l448
4 + l7
l3703 + 56
92 + l7168
148 + l23275.

Deinde propoſitæ diviſionis quotus invenietur ſic:

```
              28
    4        898
   58        707
9) 148——+——  1232778      (16 4/9—+—1287 11/11
    9        162
   54        648
              567
```

Divide l c 200 per l 10 + l 8. Et hîc quoq; reductio ad alios datis proportionales præcedet ut antea.

```
                                          lqc 4000
l 10 + l 8     l c 200   vel     lqc 1000 — lqc 512
l 10 — l 8     l 10 — l 8        ——————————————————————————
                                  lqc 40000000—lqc 20480000
10 — 8 id eſt 2
```

Deinde propoſitæ diviſionis quotus invenietur ſic:

```
               320
               160              128
lqc 64) lqc 40000000—lqc 20480000 (lqc 625000-
               384              192         —lqc 32000.
               128              128
               320
```

De ſecunda æquata partium numeratione. Caput X.

Additio partium ſimplicium.

```
                               l 3/360) l 12/360 ad l 27/360
     12        27                        4          9
    3/90 ad l 3/40                       2          3
     4          9                              5
      \___/\___/                               25
         360                               l 75/360
```

lbq

$$\text{lbq}\,\frac{6}{1200}\big)\quad \text{lbq}\,\frac{96}{1200}\ \text{ad}\ \text{lbq}\,\frac{486}{1200}$$

16 81

2 3

5

625

$$\text{lbq}\,\frac{3750}{1200}$$

96 486

$$\text{lbq}\,\frac{24}{300}\ \text{ad}\ \text{lbq}\,\frac{162}{400}$$

4 3

1200

$$\text{lc}\,\frac{2}{72}\big)\quad \text{lc}\,\frac{54}{72}\ \text{ad}\ \text{lc}\,\frac{16}{72}$$

27 8

3 2

5

125

$$\text{lc}\,\frac{250}{72}$$

54 16

$$\text{lc}\,\frac{6}{8}\ \text{ad}\ \text{lc}\,\frac{4}{18}$$

9 4

72

[illegible] partium compoſitarum.

$$\text{l}\,\frac{12}{360}+5 \qquad \text{lbq}\,\frac{96}{1200}+-\ \text{lc}\,\frac{54}{72}$$

$$\text{l}\,\frac{27}{360}-7 \qquad \text{lbq}\,\frac{486}{1200}+\ \text{lc}\,\frac{16}{72}$$

$$\text{l}\,\frac{75}{360}-2 \qquad \text{lbq}\,\frac{3750}{1200}-+-\text{lc}\,\frac{250}{72}$$

$$\text{lbc}-\frac{78732}{2400}\ \text{—}\ \text{lſ}\,\frac{128}{5600}$$

$$\text{lbc}\,\frac{2048}{2400}\ \text{—}\ \text{lſ}\,\frac{67228}{5600}$$

$$\text{lbc}\,\frac{7812500}{2400}\ \text{—}\ \text{lſ}\,\frac{236196}{5600}$$

Subductio partium ſimplicium.

$l\frac{5}{980}$) $l\frac{80}{980}$ de $l\frac{245}{980}$

16 49

4 7

3

9

$l\frac{45}{980}$

80 245

$l\frac{40}{490}$ de $l\frac{5}{20}$

2 49

980

$lc\frac{2}{72}$) $lc\frac{16}{72}$ de $lc\frac{54}{72}$

8 27

2 3

1

1

$lc\frac{2}{72}$

16 54

$lc\frac{4}{18}$ de $lc\frac{6}{8}$

4 9

72

$lbq\frac{48}{240}$) $lbq\frac{48}{240}$ de $lbq\frac{3888}{240}$

1 81

1 3

2

16

$lbq\frac{768}{240}$

48 3888

$lbq\frac{6}{30}$ de $lbq\frac{1296}{80}$

8 3

240

Subductio partium compoſitarum.

$l\frac{245}{900}+4$

$l\frac{80}{900}+9$

$l\frac{45}{900}-5$

$lbq\frac{4188}{240}-lc\frac{54}{72}$

$lbq\frac{48}{240}-lc\frac{16}{72}$

$lbq\frac{768}{240}-lc\frac{2}{72}$

lbc

lbc $\frac{7812500}{2400}$ — lſ $\frac{236196}{5600}$

lbc $\frac{2048}{2400}$ — lſ $\frac{67228}{5600}$

lbc $\frac{78732}{2400}$ — lſ $\frac{128}{5600}$

De ſecunda proportionata partium numeratione. Cap. XI.

Multiplicatio partium ſimplicium.

Multiplica l$\frac{5}{9}$ per l$\frac{7}{8}$, facies l$\frac{35}{72}$.
Multiplica lc$\frac{7}{9}$ per lc$\frac{3}{10}$, facies lc$\frac{7}{30}$.
Multiplica lc$\frac{5}{9}$ per lſ$\frac{7}{8}$, cubum ſolidabis, & ſolidum cubabis: tumq; reductione facta, multiplicabis lſc $\frac{3125}{59049}$ per lſc $\frac{343}{512}$: factus ab iis erit lſc $\frac{1071875}{30233088}$.

Multiplicatio partium compoſitarum.

Multiplica lc$\frac{4}{7}$ + $\frac{5}{7}$ per l$\frac{8}{9}$, facies l$\frac{200}{441}$ + lqc$\frac{8192}{35721}$.
Multiplica l$\frac{5}{7}$ — l$\frac{7}{8}$ per l$\frac{5}{7}$ — l$\frac{7}{8}$, facies 1$\frac{33}{56}$ — l2$\frac{1}{2}$.
Multiplica l$\frac{3}{5}$ + lc$\frac{7}{9}$ per l$\frac{3}{5}$ — lc$\frac{7}{9}$, facies $\frac{3}{5}$ — lc$\frac{49}{81}$.

Diviſio partium ſimplicium.

Divide l$\frac{7}{9}$ per l$\frac{8}{9}$, quotus erit l$\frac{7}{8}$. Divide l$\frac{7}{9}$ per lc$\frac{4}{5}$, reductione facta divides lqc $\frac{343}{729}$ per lqc$\frac{16}{25}$, quotus erit lqc $\frac{8575}{11664}$.

Diviſio partium compoſitarum.

Divide l$\frac{5}{8}$ + lc$\frac{3}{7}$ per 3, quotus erit — l$\frac{5}{72}$ + lc$\frac{1}{63}$.
Divide l$\frac{1}{2}$ per l$\frac{2}{3}$ + l$\frac{2}{5}$, reductione facta, divides l$\frac{1}{3}$ — l$\frac{1}{5}$ per $\frac{4}{15}$, quotus erit l4$\frac{11}{16}$ — l2$\frac{13}{16}$.
Divide l$\frac{13120}{81}$ + $\frac{221}{9}$ per $\frac{884}{81}$ + l$\frac{209920}{6561}$. hîc $\frac{221}{9}$ per $\frac{884}{81}$, & l$\frac{13120}{81}$ per l$\frac{209920}{6561}$ divides, quotus erit 2$\frac{1}{4}$.

FINIS LIBRI PRIMI.

BERNARDI SALIGNACI BURDEGALENSIS ALGEBRÆ *liber ſecundus.*

De Æquatione Algebraica, deq; ejus partibus & præmiſſa ratiocinatione. Cap. I.

1. *SEcunda pars Algebræ AEquationem Algebraicam docet. AEquatio Algebraica eſt, quæ ad quæſtionis Arithmeticæ explicationem, figuratos heterogeneos certis legibus æquat.*

Ad quæſtionis explicationem) Finis igitur Algebraicæ æquationis eſt propoſitæ quæſtionis explicatio: ejus enim cauſa inſtituitur. Deinde in ea figurati heterogenei certis legibus æquantur, ut non omnis heterogeneorum æquatio, ſed ea tantúm quam Algebræ leges conſtituunt, Algebraica ſit.

2. *Ea utramq; partem affirmatam habet, quarum altera ſemper eſt unius termini, reliqua nunc unius, modó duorum eſt.*

Sive igitur æquationis quædam pars negata, ſive utraque plurium terminorum ſit, Æquatio Algebraica non erit. Hîc enim æquantur heterogenei aut unus uni, aut unus duobus: & quidem affirmaté.

3. *Præterea AEquatio Algebraica ratiocinationem quæſtioni congruam præmittit.*

Quæſtioni congruam) Non igitur á propoſita quæſtione digrediendum: neque enim digreſſio quæſtioni congruit. Solet autem hîc pro ratiocinationis principio figuratus aliquis poni, unde ratiocinatio quæſtionis veſtigiis inſiſtens ad Algebraicam

braicam æquationē perveniat, cujus legibus quæſtio deniq; concludatur. Itaque ſi poſiti ratiocinationem leges Algebraicæ non ferent, non præcepta Algebraica, ſed poſitus figuratús continuó mutandus erit. Exempli cauſa in hac quæſtione, quæ ſunt duæ inæquales partes numeri 72, quarum planus ſit 720? Si pro majore parte ponas 1q, Algebra quæſtionē explicare non poterit: nam in propoſita ſpecie valor unius quadrati non 160, ſed 60 eſt: hîc igitur non Algebram, ſed tuum poſitum ſtatim mutabis: neque enim hîc ars, ſed tu, qui arte uteris, peccaveris.

4. *Si finis ratiocinationis æquatio redundans fuerit, redundantium ab utriſq; ſubductio æquatos legitimos faciet.*

Dederit finis ratiocinationis, ut æquentur inter ſe 1q + 310 & 1q + 2l. hîc ſubducto utrinque uno quadrato, algebraicé æquabuntur 310 & 2l. Si 1bq + 5q + 24 & 6942 æquaveris, ſubduces utrinq; 24, & algebraicé æquabuntur 1bq + 5q & 6918. Si $\frac{1q}{3}$ + $\frac{1l}{2}$ & 10 l + 30 æquaveris, ſubduces utrinque $\frac{1l}{2}$, & legitimé æquabuntur $\frac{1q}{3}$ & $9\frac{1}{2}$l + 30. Itaque ſi æquati affirmati terminos utrinque æquales & ſimiles habeant, hujuſmodi æquales & ſimiles redundabunt: ii enim utrinque ſubducti legitimé æquales relinquunt.

5. *Sin is æquatio deficiēs fuerit, ſiquidem terminorum alter minutus fuerit, defectus ad utroſque additio æquales explebit.*

Dederit finis ratiocinationis, ut 50 − $1\frac{2}{3}$l & 0 æquentur. hîc additis ad utroſque $1\frac{2}{3}$l, explebuntur 50 & $1\frac{2}{3}$l. Æquati fuerint 1bq + 5q − 24 & 6942, additis ad utroſq; 24, explebuntur 1bq + 5q & 6966. Æquaveris 1q − 2l + 310 & 1q, additis ad utroſque 2l, explebuntur 1q + 310 & 1q + 2l.

6. *Sin uterque minutus fuerit, utrum defectu n priús addas nihil intereſt.*

T 2

Finis ratiocinationis dederit, ut 726+42q−132l & 385l−35q æquentur, poteris terminos ſic explere. primùm utriſque addes 132l, & erunt æquales 517l−35q & 726+42q: deinde utriſque etiam addes 35q & explebuntur 517l & 726+77q. Vel contrà primùm utriſque addes 35q & erunt æquales 726+77q−132l & 385l: deinde utriſque addes 132l & explebuntur 726+77q & 517l.

7. *Verùm ſi finis ratiocinationis æquatio redundans & deficiens fuerit, redundantium ſubductionem defectus additio antecedet.*

Sic enim redundantium ab utriſque ſubductio æquatos ſemper legitimos faciet. Itaque ſi æquati fuerint 1q−2l+310 & 1q, primò utriſq; addes 2l & explebuntur 1q+310 & 1q+2l: deinde ſublato utrinque uno quadrato legitimè æquabuntur 310 & 2l. His ita poſitis non tantùm æquationum doctrinam, ſed earum quoque uſum, Deo volente, nobis facillimum fore confido.

De prima Æquatione Algebraica. Cap. II.

1. AE*Quatio Algebraica duplex eſt. Prima duobus inter ſe æquatis, tertium abſoluto æqualem per proportionem concludit.*

Hoc enim per inventionem quarti proportionalis licet. Itaque æquatis 4l & 88, concludemus 1l & 22 æquari: æquatis 6bq & 384l, concludemus 1c & 64 æquari: æquatis 4tq & 180 bq, concludemus 1bq & 27 æquari.

2. *Hic tertii numerus quidem unitas, nota autem erit differentia notæ primi ad notam ſecundi.*

Tertii numerus erit unitas, ut inventio quarti proportionalis tantò facilior & brevior ſit: nota tertii numeri erit differentia notæ primi ad notam ſecundi, ut quartus proportionalis

lis ſemper abſolutus numerus ſit. Deinceps exempla quæ clariſſimus piæ memoriæ P. Ramus in ſuis æquationibus habuit, huc tranſcribam: hoc enim ad meam rem accommodatius video. Ita tamen tranſcribam, ut verbis non aſtringar.

1. Antecedo, inquit Alexander ad Calliſthenem, Epheſtionem biennio: Clytus utriuſq; ætatem quadriennio excedit, quæro quot anni ſunt omnium? Reſpondet Calliſthenes, Pater meus ubi nonageſimum ſextum annum compleviſſet, æquavit annos omnium veſtrum. Ergo ex Calliſthenis reſponſo ſingulorum annos explicaturus, pono 1l pro annis Epheſtionis: erit itaq; 1l + 2 pro annis Alexandri, & 2l + 6 pro annis Clyti: deniq; pro patris annis 4l + 8 æqua 96, utrinq; tollantur 8: reſtabunt 4l æqua, 88. ideoq; 1l æquabitur 22 pro annis Epheſtionis: Alexandri igitur anni erunt 24, Clyti 50.

2. Quis eſt numerus é quo ſi $\frac{1}{4}$ & reſidui $\frac{2}{5}$ ſuſtuleris, reliquus erit 27? Eſto 1l pro quæſito, unde tolle $\frac{1l}{4}$, manebunt $\frac{3l}{4}$. cujus reſidui $\frac{2}{5}$ ſunt $\frac{6l}{20}$. Sed $\frac{1l}{4}$ & $\frac{6l}{20}$ ſunt $\frac{11l}{20}$ quæ ſumma ſublata ex 1l relinquit $\frac{9l}{20}$ æqua 27. Ergo 1l æquabitur 60 pro quæſito nunumero, cujus $\frac{1}{4}$ eſt 15, & reſidui 45 duæ quintæ ſunt 18: item 15 + 18 ſunt 33, & 60 − 33 ſunt 27.

3. Quis eſt numerus cujus $\frac{1}{3}$ quadruplicata eſt 11? Eſto pro quæſito 1l. Jam $\frac{4l}{3}$ & 11 æquantur: ergo 1l & $8\frac{1}{4}$ æquantur. Quare quæſitus numerus eſt $8\frac{1}{4}$, cujus $\frac{1}{3}$ eſt $2\frac{3}{4}$, quæ quadruplicata eſt 11.

4. Coronatus 50 ſolidorum cõmutetur in ſolidos & quadrantes æquali numero: quot erunt ſolidi? quot quadrantes? Eſto 1l pro numero quadrantum: erit igitur $\frac{1l}{4}$ pro numero ſolidorum: nam ſolidus valet 4 quadrantes. Jam 1l + $\frac{1l}{4}$ ſunt $\frac{5l}{4}$ æqua 50: ergo 1l æquabitur 40. Quare 40 quadrantes & 40 ſolidi coronatum 50 ſolidorum commutabunt.

5. Hortorum area longitudine ad latitudinem ſeſquitertia quadratis areolis 588 comprehenditur, quanta eſt ejus lon

gitudo? quanta latitudo? Eſto pro longitudine 1l, latitudo erit $\frac{3l}{4}$, area $\frac{3q}{4}$ æquá 588. ergo 1q æquabitur 784, cujus quadrati latus eſt 28 pro longitudine. latitudo igitur erit 21: ut enim 4 ad 3 ſic 28 ad 21: & 28 per 21 faciunt 588.

6. Sunt regi principes, comites & milites: quivis princeps comites duplos, quivis comes milites quadruplos habet ad principum numerum. Militum autem $\frac{1}{300}$ principum numerum novies continet. dic numerum principum, comitum & militum. Eſto pro numero principum 1l, ergo unus princeps habebit 2l comitum, & unus comes 4l militum: ideoque 1l principum habebit 2q comitum, & 2q comitum 8 cubos militum. ſed $\frac{1}{300}$ cuborum 8 & 9l æquãtur ex theſi: ergo 1q æquabitur 225, cujus quadrati latus eſt 15 pro numero principum. Jam veró 15 per 30 faciunt 450 pro numero comitum, & 450 per 60 faciunt 27000 pro numero militum.

7. Murus longitudine tripla ſeſquialtera ad latitudinem, altitudine veró quintupla ad longitudinem, redimitur in ſingulas perticas tot coronatis quot perticæ ſunt in latitudine: ſummaq; univerſi pretii eſt 980 coronatorum: quænam hujus ædificii altitudo? quæ longitudo? quæ latitudo? Eſto 1l pro longitudine, erunt igitur $\frac{2l}{7}$ pro latitudine & 5l pro altitudine: ideoq; totum ędificium erit $\frac{10c}{7}$. Jam veró 1 pertica redimitur $\frac{2l}{7}$, ergo $\frac{10c}{7}$ redimuntur $\frac{20bq}{49}$ quæ æquabuntur 980. ergo 1bq æquabitur 2401, cujus biquãdrati latus eſt 7 pro muri longitudine, ergo ejus latitudo erit 2, altitudo 35.

8. Dux militiæ quadratam aciem inſtruit, & milites reliquos habet 284. deinde in ſingulos ordines militem adjicit, ſed 25 deſunt ad quadratum explendum: quot igitur milites habet? Eſto pro vno latere primi quadrati 1l, & quadretur. erit igitur numerus militum 1q + 284. Jam quadretur 1l + 1, quadratus erit 1q + 2l + 1. inde ſublatis 25, reliquus 1q + 2l − 24 & 1q − 284 æquabuntur. utriſque adde 24, æquabuntur 1q + 2l & 1q

& 1q+308.utrinque tolle 1q,manebunt 2l & 308 æqua. Ergo 1l & 154 æquabuntur. Jam quadratus é 154 eſt 23716, ergo numerus militum erit 23716+284 hoc eſt 24000, qui auctus 25 erit quadratus é 155.

9. Dividantur *91* quadrifariam,ſic ut additis quidem primæ parti 4,ſecundæ 3: ſubductis autem,é tertia 2, é quarta 1, compoſiti & reſidui ſubduplam rationem continuam habeant: quæritur quæ ſit pars prima? quæ ſecunda? quæ tertia? & quarta? Eſto pro prima parte 1l, cui ſi addantur 4, erit 1l+4. ſed reliquæ partes in ſubdupla ratione continuæ ſunt 2l+8, 4l+16, 8l+32. ergo propoſitæ partes ſecundum hypotheſim erũt 1l, 2l+5, 4l+18 & 8l+33. earum ſumma eſt 15l+56 æqua *91.* utrinque tolle 56, manent 15l & 35 æqua. ergo 1l & $2\frac{1}{3}$, 2l & $4\frac{2}{3}$, 4l & $9\frac{1}{3}$, 8l & $18\frac{2}{3}$ æquabuntur. Quare prima pars fuerit $2\frac{1}{3}$, ſecunda $9\frac{2}{3}$, tertia $27\frac{1}{3}$, quarta $51\frac{2}{3}$. Hæ enim partes ſimul additæ ſunt *91*: & ſi primæ addas 4, ſecundæ 3: ſubducas autem é tertia 2, é quarta 1, compoſiti & reſidui propoſitam rationem habebunt.

10. Duo ſtatuunt anulum emere 50 aureis, primus ait ſecundo, ſi dimidium numorum tuorum mihi dederis, ſolus emam: imó, reſpondet ſecundus, ſi tertiam partem tuorum mihi dederis, totum perſolvam: quæro quot uterque numos habuerit? R. Eſto pro numis primi 1l, ergo numi ſecundi erunt $50-\frac{1l}{3}$. Ergo $25+\frac{5l}{6}$ & 50 æquabuntur: utrinque tolle 25, manebunt $\frac{5l}{6}$ & 25 æqua. Ergo 1l & 30 æquabuntur. Quare pecunia primi erit 30, ſecundi 40. Nempe $\frac{1}{3}$ é 30 eſt 10, $\frac{1}{2}$ é 40 eſt 20. & 30+20 ſunt 50, quam ſummam etiam conſtituunt 40+10. Exempla ſuperiora numerorum explicabilium fuerunt, ſequentia ſunt inexplicabilium.

11. Quadratus temporis multiplicatus per 5 facit 60, quodnam eſt illud tempus? Eſto pro tempore 1l, cujus quadratus multiplicatus per 5 facit 5q ęqua 60: ergo 1q & 12 ęquabuntur: quare tempus quæſitum erit $\sqrt{12}$. hujus quadratus eſt 12, qui

multiplicatus per 5 facit 60.

12. E duobus temporibus ſecundum primi triplũ eſt, primiq; $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{5}$ ſecundi facit 30, quantum eſt utrumque tempus? Eſto 1l pro primo, ergo pro ſecũdo erũt 3l. Jam $\frac{1l}{4}$ per $\frac{3l}{5}$ facit $\frac{3q}{20}$ æquo 30: ergo 1q & 200 æquabuntur. Quare tempus primum erit l 200, & ſecundũ l 1800. Jam $\frac{1}{4}$ é l 200 & $\frac{1}{5}$ é l 1800 ſunt l $\frac{25}{2}$ & l 72, á quibus factus eſt l 900 hoc eſt 30.

De ſecunda æquatione. Cap. III.

.1 AE*Quatio ſecunda é tribus heterogeneis notarũ continué proportionalium duos æquat uni, ut quadrato dimidio numeri medii valorem unius medii inveniat.*

Hîc igitur medii figurati numerus ſemper dimidiatur, & & dimidiatus quadratur: tandemque valor unius medii quæritur. Si maximi valor quæratur, quoniam hîc tres heterogenei notarum continué proportionalium ſunt, cognito valore medii valor maximi in promptu eſt. Etenim æquati fuerint 72q & 1bq + 720, & inventus unius quadrati valor fuerit 60. Hîc quia 1 ad 60, hoc eſt per inventionem tertii continué proportionalis 60 ad 3600 eſt per theſim & per 3 verſ. 1 cap. 1 lib. ſicut u ad q, hoc eſt ex theſi ſicut q ad bq, ideo erit ut 60 ad 3600 ſic q ad bq. æqualibus igitur q & 60 ex theſi, æquabuntur quoq; bq & 3600. Quare cognito valore medii, valor maximi in promptu eſt.

2. *Hic unitas & minimi figurati nota, & maximi numerus eſt.*

Unitas minimi figurati nota eſt: ſic enim medii valor opera minimi cognoſcitur. Eademque maximi figurati numerus eſt: é tribus enim datorum figuratorum numeris aliquis unitas fieri debuit, ne eadem inventio pro ejuſdem medii valore infinitos numeros diceret: datis enim tribus inæqualibus numeris

metis infiniti proportionales eſſe poſſunt. Nunc neque medii neque minimi numerus ſemper unitas fieri poteſt, quia tota hæc ſecunda æquatio propter medii varietatem inſtituitur, & medius opera minimi cognoſcitur. Hic igitur maximi figurati numerum unitatem facimus, quia ſic eadem inventio ejuſdem medii eundem ſemper valorem dicet.

3. *Itaque ſi maximi figurati numerus unitas non erit, quoti numerorum per maximi numerum diviſi pro figuratorum numeris ſumentur.*

Sic pro æquatis $4q + 3l$ & 217 eis proportionales ſumemus $1q + \frac{3l}{4}$ & $\frac{217}{4}$; pro æquatis $\frac{1q}{4} + 121$ & $31\frac{1}{4}$ eis proportionales ſumemus $1q + 484$ & $125l$.

De ſecunda æquatione primi generis. Cap. IIII.

1. **AE**Quatio ſecunda duorum generum eſt. *Primi generis eſt quæ unum extremorum cæteris æquat; & minimo ad quadratum dimidiati addito, latus additorum exquirit: Tumque*

2. *Figuratis majoribus æquatis minimo, dimidiatum medii numerum tollit ex additorum latere.*

Quippe inventus reliquus erit valor unius medii. Etenim æquati ſunto $1q + 8l$ & 65. Hic dimidium ex 8 eſt 4, cujus quadratus eſt 16: deinde $16 + 65$ ſunt 81, cujus quadrati latus eſt 9; unde ſubducto 4 reliquus eſt 5 pro latere æquati quadrati. Quadrati enim 81 diagonalia ſunto 16 & æquatus quadratus: ergo latus quadrati 81 minutum latere quadrati 16, hoc eſt $9 - 4$, ut diximus, erit latus æquati quadrati: nam diagonalium latera partes ſunt lateris totius quadrati.

Hic ſi maximi figurati numerum, multitudinis numerũ fa

ciũ, valor unius medii tunc non erit 5. Etenim multiplica 1q + 8l & 65 per 3, facies 3q + 24l & 195. Jam dimidium é 24 eſt 12, cujus quadratus eſt 144: deinde 144+195 ſunt 339, cujus quadrati latus eſt l339, unde ſubducto 12 reliquus eſt major quàm 5. Rurſum ſi æquatos 1q + 8l & 65 per 4, 5, 6, 7 multiplices, eadem inventio totidẽ ejuſdem medii valores dicet, quod abſurdum eſt. Idem in ſequentibus æquationibus demonſtrari poteſt: quare ut eadem inventio ejuſdem medii eundem ſemper valorem dicat, maximi figurati numerus in ſecunda æquatione ſemper unitas ſit. Hoc ideo hîc repeto, quia exemplum antea proponere commodè non potui.

1. Qui ſunt duo numeri rationis $3\frac{1}{4}$, quorum planus ipſis additus erit $142\frac{1}{2}$? Eſto pro primo 1l, inde concludes pro ſecundo, ut 13 ad 4 ſic 1l ad $\frac{4l}{13}$ Jam planus utriuſq; erit $\frac{4q}{13}$, & huic additis $1l\frac{4l}{13}$ totus erit æqualis $142\frac{1}{2}$, hoc eſt per 3 verſ. 3 cap. 1q + $4\frac{1}{4}$l æqua $463\frac{1}{8}$. Nunc dimidius medii $4\frac{1}{4}$ eſt $2\frac{1}{8}$, cujus quadratus eſt $\frac{289}{64}$, qui additus ad $463\frac{1}{8}$ eſt $\frac{29929}{64}$, cujus quadrati latus eſt $\frac{173}{8}$: vnde tolle $2\frac{1}{8}$ reliquus erit $\frac{156}{8}$ pro valore, unius lateris. Atqui ut 13 ad 4 ſic $\frac{156}{8}$ ad 6: & 6 per $\frac{156}{8}$ faciunt $\frac{936}{8}$, cujus plani additi ad 6 & $\frac{156}{8}$ ſumma eſt $142\frac{1}{2}$.

2. Quidam peregrè profecturus, 1370 milliaria conficere ſtatuit, primo autem die ſeſquimilliarium conficit, ſecundo $\frac{1}{6}$ amplius, & deinceps reliquis diebus ſimili differentia progreditur, quanto tempore totum iter abſolverit? Eſto 1l pro quæſito tempore. Jam 1l − 1 per $\frac{1}{6}$ facit $\frac{1l-1}{6}$. huic facto adde $\frac{3}{2}$, totus erit $\frac{1l+8}{6}$ pro ultimo progreſſionis termino. Item ad $\frac{1l+8}{6}$ addo $\frac{3}{2}$, totus eſt $\frac{1l+17}{6}$, qui per $\frac{1l}{2}$ facit $\frac{1q+17l}{12}$ æqua $\frac{1370}{1}$, hoc eſt per 3 verſ. 3 cap. 1q + 17l æqua 16440. Nunc dimidium é 17 eſt $8\frac{1}{2}$, cujus quadratus $72\frac{1}{4}$ additus ad 16440 eſt $16512\frac{1}{4}$. á cujus latere $\frac{257}{2}$ ſi tollas $\frac{17}{2}$, manent $\frac{240}{2}$ hoc eſt 120 pro quæſito terminorum numero. Exemplum quod deinde habet P. Ramus de eo qui peregrinationem inſtituit tot dies quot is aureos habebat,

bebat, falſum eſt: neq; enim hic ſumma per Algebram invēta cum data convenit. Quare ad aliud tranſeo.

3. Quis eſt numerus cujus quadratus & auctus 8 & minutus 3 facit planum 6942? Eſto 1l pro quæſito, ejus quadratus erit 1q. tum ex 1q + 8 & ex 1q − 3 planus erit 1bq + 5q − 24 æqua 6942. utrique adde 24, æquabuntur 1bq + 5q & 6966. Nunc dimidium medii 5 eſt 2$\frac{1}{2}$, ejuſque quadratum eſt $\frac{25}{4}$: quod additum ad 6966 eſt $\frac{27889}{4}$, cujus latus eſt $\frac{167}{2}$. Præterea $\frac{167}{2} - \frac{5}{2}$ eſt $\frac{162}{2}$ hoc eſt 81 pro valore vnius quadrati: & deniq; 81 + 8, itemque 81 − 3 ſunt 89 & 78, quorum planus eſt 6942: numerus igitur quæſitus eſt 9. Sequentia ſunt ἄῤῥητα.

4. Quas in partes ſecandus eſt 6 ut planus totius & ſegmenti ſit æqualis reliqui ſegmenti quadrato? Eſto 1l pro uno ſegmento, reliquum ſegmentum erit 6 − 1l. quadratus primi ſegmenti eſt 1q. planus totius & ſecundi ſegmenti erit 36 − 6l æqualis 1q. Adde utriſq; 6l, æquabuntur 36 & 1q + 6l. Nunc dimidium é 6 eſt 3, cujus quadratus 9 additus ad 36 eſt 45, cujus latus eſt l45. Quare valor unius lateris eſt l45 − 3. hujus quadratus eſt 54 − l1620, quem divide per 6, quotus erit 9 − l45. quæſitæ igitur partes erunt l 45 − 3 & 9 − l45.

5. In quas duas partes ſecandus eſt 19 ut earum planus per differentiam diviſus faciat 17$\frac{1}{2}$? Eſto pro majore parte 1l, minor erit 19 − 1l: & planus ex iis erit 19l − 1q. partium differentia eſt 2l − 19, per quam planus 19l − 1q diviſus eſt $\frac{19l - 1q}{2l - 19}$ æqua $\frac{35}{2}$. Ergo per reductionem ad integra 38l − 2q & 70l − 665 æquantur. Utriſque adde 2q: æquabuntur igitur 38l & 70l + 2q − 665. Rurſum utrique parti adde 665, æquabuntur inter ſe 38l + 665 & 70l + 2q. Utrinque tolle 38l, manent æqualia 32l + 2q & 665. Jam dimidium é 16 eſt 8, cujus quadratus 64 additus ad $\frac{665}{2}$ eſt 396$\frac{1}{2}$, a cujus latere ſublatus 8 eſt l396$\frac{1}{2}$ − 8 pro majore parte. minor itaq; pars eſt 27 − l396$\frac{1}{2}$. Harum differentia eſt l1586 − 35: planus veró eſt l$\frac{971425 - 1225}{2}$. Deniq; ſi l971425 − 1225 dividas per l3172 − 70, quotus erit 17$\frac{1}{2}$.

3. Figuratis autem minoribus æquatis maximo dimidiatum medii numerum ad latus additorum addit.

Quippe inventus totus erit valor unius medii. Etenim æquati ſunto 6l+40 & 1q. hîc dimidium é 6 eſt 3, cujus quadratus eſt 9. deinde 9+40 eſt 49, cujus quadrati latus eſt 7, cui ſi addas 3, totus erit 10 pro latere æquati quadrati. Etenim æquati quadrati diagonalia ſunto 9 & 49, ergo ejus latus erit 3+7 hoc eſt 10 ut diximus: hujus cauſa eſt quia diagonalium latera partes ſunt lateris totius quadrati.

1. Quis eſt numerus cujus pars ignota ſi quadretur primùm, deinde eadem cum parte cognita 4 multiplicetur, ex utroque plano totus ſit 117? Eſto pro quæſito numero 1l, pars ignota erit 1l−4, cujus quadratus eſt 1q−8l+16. tum rurſus eadem pars ignota 1l−4 per 4 partem notam facit planum 4l−16, quo ad quadratum addito habes 1q−4l æqua 117. adde utrique parti 4l, habebis 4l+117 æqua 1q. Nunc dimidium é 4 eſt 2, ejuſq; quadratus 4. Deinde 4+117 eſt 121, cujus latus eſt 11, quod additum ad 2 eſt 13 pro valore 1l. Jam ſeca 13 in 9 & 4. hîc quadratus é 9 eſt 81, deinde 9 per 4 facit 36, & 81+36 eſt 117.

2. Duorum mercatorum ſerici primus 40 ulnas habet, ſecundus 90. primus uno coronato vendit $\frac{1}{3}$ ulnæ pluſquam ſecundus: tumque venditione peracta ambo numerant coronatos 42, quæſtio eſt quot ulnas ſinguli coronato vendiderint? Eſto 1l pro ulnis quas ſecundus coronato vendidit: pro primi itaque ulnis coronato venditis erit 1l+$\frac{1}{3}$. Jam ſi ulnarum 1l+$\frac{1}{3}$ venditur coronato, ergo ulnæ 40 venduntur $\frac{40}{1l+\frac{1}{3}}$ vel reductione ad integra $\frac{120}{3l+1}$ coronatorum: hæc pecunia eſt primi. Item ſi 1l ulnæ venditur coronato, ergo 90 ulnæ venduntur $\frac{90}{1l}$ coronatorum: hæc ſecundi pecunia eſt. Utriuſque pecunia ſimul addita eſt $\frac{120}{3l+1}+\frac{90}{1l}$ æqua $\frac{42}{1}$. Ergo 390l+90 & 126q +42l æquantur. Utrinque tolle 42l, æquantur igitur 348l+90 &

& 126q : vel per 3 verſ. 3 cap. $\frac{58l}{21}+\frac{5}{7}$ & 1q. Nunc dimidium é $\frac{58}{21}$ eſt $\frac{29}{21}$, cujus quadratum eſt $\frac{841}{441}$, quod additum ad $\frac{29}{21}$ eſt 3 pro valore unius lateris. Ergo ſecundus 3 ulnas uno coronato & primus $3\frac{1}{3}$ eodem pretio vendiderit. Jam ſi $3\frac{1}{3}$ venduntur uno coronato, ergo 40 venduntur 12: & ſi 3 venduntur quoque uno coronato, ergo 90 venduntur 30: denique 12 + 30 ſunt 42. Hîc item inexplicabilis figurati quæſtiones ſunt, ut

3. Quis eſt quadratus cujus lateris quadruplo additis 21, totus ad ipſum quadratum ſit ut 9 ad 4? Eſto 1q pro quæſito, erit igitur 1l pro ejus latere. Jam ut 4l + 21 ad 1q ſic ex theſi 9 ad 4, ergo 9q & 16l + 84 æquantur, vel per 3 verſ. 3 cap. 1q & $\frac{16l}{9}+\frac{84}{9}$ æquantur. Nunc dimidium é $\frac{16}{9}$ eſt $\frac{8}{9}$, cujus dimidii quadratũ eſt $\frac{64}{81}$: tumque $\frac{64}{81}+\frac{84}{9}$ ſunt $\frac{820}{81}$, cujus quadrati latus eſt l $\frac{820}{81}$. Ergo l $\frac{820}{81}+\frac{8}{9}$ erit pro valore unius lateris, cujus quadratus eſt $\frac{884}{81}+$ l $\frac{209920}{6561}$. Jam quadruplica l $\frac{820}{81}+\frac{8}{9}$, facies l $\frac{13120}{81}+\frac{32}{9}$, quibus ſi addas 21, totus erit l $\frac{13120}{81}+\frac{221}{9}$, qui totus diviſus per $\frac{884}{81}+$ l $\frac{209920}{6561}$ dabit in quoto $2\frac{1}{4}$: nam ſi dividas $\frac{221}{9}$ per $\frac{884}{81}$, quotus erit $2\frac{1}{4}$, & ſimiliter ſi dividas l $\frac{13120}{81}$ per l $\frac{209920}{6561}$ quotus erit l $\frac{81}{16}$ hoc eſt $\frac{9}{4}$, vel $2\frac{1}{4}$. Ergo $\frac{884}{81}+$ l $\frac{209920}{6561}$ erit quadratus cujus lateris quadruplo &c.

4. E duobus viatoribus primus quotidie 10 milliaria conficit: ſecundus triduo póſt ſequitur, primoque die milliare 1 conficit, ſecundo 2, tertio 3, & ſic deinceps uno plus: quanto tempore primum aſſequetur? Eſto 1l dierum pro quæſito tempore, ergo 1l milliarium erit ultimus progreſſionis terminus: patet hoc per 6 verſ. 4 cap. 2 lib. meę arithm. nã 1l − 1 per 1 facit 1l − 1, qui factus auctus 1 eſt 1l. quare primus terminus & ultimus additi erunt 1l + 1, á quibus factus per $\frac{1l}{2}$ erit $\frac{1q}{2}+\frac{1l}{2}$ pro ſumma milliariorum á ſecundo confectorum. Primus item triduo antecedente confecit 30 milliaria: ſed & deinde quotidie decem milliaria conficit, ergo uno latere dierum 10l milliariorum confecerit: quibus adde 30, erunt 10l + 30 pro milliariis primi, & ſic $\frac{1q}{2}+\frac{1l}{2}$ æquatur 10l + 30. Utrinque tolle $\frac{1l}{2}$, ma-

nebit $\frac{1q}{2}$ æqua $9\frac{1}{2}$l + 30. Nunc dimidium è 19 eſt $\frac{19}{2}$, cujus quadratus eſt $\frac{361}{4}$, qui additus ad 60 eſt $\frac{601}{4}$, cujus latus eſt l$\frac{601}{4}$, quod additum ad $\frac{19}{2}$ eſt l$\frac{601}{4}$ + $\frac{38}{4}$. ergo quæſitum tempus erit feré dies 22. nam latus quadrati $\frac{601}{4}$ eſt majus quám 12, & $\frac{38}{4}$ ſunt $9\frac{1}{2}$.

De ſecunda Æquatione ſecundi generis. Cap. V.

.1 *AEQuatio ſecunda ſecundi generis eſt quæ extremos medio æquat; & minimo ſubducto é quadrato dimidiati, latus reliqui pro hypotheſi dimidiato medio addit aut detrahit.*

Hujuſmodi enim totus vel reliquus eſt valor unius medii. Etenim æquati ſunto 1q + 21 & 10l. hîc dimidium é 10 eſt 5, cujus quadratus eſt 25. deinde 25 − 21 eſt 4, cujus quadrati latus eſt 2. ergo inquam nunc 5 + 2, modó 5 − 2, hoc eſt modó 7, modó 3 erit valor unius lateris. Etenim quadratorum inæqualium 49 & 25 diagonalia ſunto, majoris quidem 25 + 4, minoris autem 9 + 4; & diagonalium latera ſunto 5 + 2 & 3 + 2. Hic quoniam 5 − 2 diximus eſſe 3, conſequens eſt ut 2 + 3 ſint 5. Itaque 5 + 2 & 3 + 2 hoc eſt 7 & 5 quadratorum latera ſunt, illud majoris 49, hoc minoris 25: latera enim diagonalium partes ſunt lateris totius quadrati. Præterea 9 eſt alterum diagonale quadrati 25 ex theſi, ergo 9 quadratum eſt: nam diagonalia ſuo toti ſimilia ſunt. Ergo 5 − 2 hoc eſt 3 ut diximus, cúm ſit latus diagonalis 9 ex theſi, erit latus quadrati. Ergo tã 5 + 2 quám 5 − 2 latus quadrati eſſe poterit: ideoque pro conditione quæſtionis liberũ erit aliás additionem aut ſubductionem uſurpare, aliás alteram tantúm, ut ex ſubjectis exemplis apparebit. Hic igitur latus inventum quæſtioni prudenter applicabitur, ne quid abſurdi ex ea re exiſtat.

1. Duorum mercatorum panni ulnas 11 habentium primus uno coronato tantúm vendit, quanta eſt $\frac{1}{4}$ ulnarum ſecundi,

cundi, ſecundus autem eodem pretio vendit tot ulnas, quantus eſt numerus ulnarum primi, tandemque ex iſta venditione ambo fecere $\frac{35}{6}$ coronatorum: quot ulnas ſinguli habuere? quot ulnas coronato vendidere? Eſto 1l pro ulnis primi, ſecundus ergo habebit $11-1l$ ulnæ. hujus $\frac{1}{6}$ eſt $\frac{11-1l}{6}$ pro ulnis quas primus uno coronato vendit: ergo primus 1l ulnarum vendit $\frac{6l}{11-1l}$ coronatorum. Præterea ſecundus 1l ulnarum vendit uno coronato ex theſi, ergo $11-1l$ ulnarum vendit $\frac{11-1l}{1l}$. Item $\frac{6l}{11-1l}$ & $\frac{11-1l}{1l}$ ſunt $\frac{121+7q-22l}{11l-1q}$ æqua $\frac{35}{6}$. factus igitur ab extremis $726+42q-132l$ facto á mediis $385l-35q$ æquabitur. Utriſq; adde $35q$, jam $726+77q-132l$ & $385l$ æquabuntur. item utriſque adde $132l$, hîc $517l$ & $726+77q$ hoc eſt per 3 verſ. 3 cap. $\frac{47l}{7}$ & $\frac{66}{7}+1q$ æquabuntur. Nunc dimidium é $\frac{47}{7}$ eſt $\frac{47}{14}$, cujus quadratus eſt $\frac{2209}{196}$, unde ſi tollas $\frac{66}{7}$, reliquus erit $\frac{361}{196}$, cujus quadrati latus eſt $\frac{19}{14}$, quod additum ad $\frac{47}{14}$ eſt $\frac{66}{14}$ pro valore unius lateris. vel etiam cujus latus $\frac{19}{14}$ ſubductum é $\frac{47}{14}$ relinquit 2 pro valore unius lateris. Si primi ulnæ ſint $\frac{66}{14}$, tum $11-\frac{66}{14}$ erunt $\frac{88}{14}$ pro ulnis ſecundi. deinde $\frac{1}{6}$ ex $\frac{88}{14}$ eſt $\frac{88}{84}$. quare primus coronato vendet $\frac{88}{84}$ ulnæ: ſecundus autem eodem pretio vendet $\frac{6}{14}$. Si primi ulnæ ſint 2 tũ $11-2$ ſunt 9 pro ulnis ſecundi: deinde primus coronato vendet $\frac{3}{2}$ ulnæ, ſecundus eodem pretio duas ulnas dabit.

2. Duorum mercatorum ſerici primus 40 ulnas habet, ſecundus 90. primus uno coronato vendit $\frac{1}{3}$ ulnæ pluſquam ſecundus, tum venditione peracta ambo numerant coronatos 42. quæſtio eſt quot ulnas ſinguli coronato vendiderint? Hoc exemplum antea per ſecundam æquationem primi generis explicatum nunc per ſecundam ſecundi generis explicabitur, ut ſimul appareat idem exemplum variis æquationibus explicari poſſe. Eſto igitur 1l ulnarum pro ulnis quas primus coronato vendidit: pro ſecundi ergo ulnis coronato venditis erit $1l-\frac{1}{3}$. Jam ſi ulnarum 1l uno coronato venditur, ergo ulnæ 40 venduntur $\frac{40}{1l}$ coronatorum: hæc pecunia eſt primi.

Item ſi ulnarum $1l - \frac{1}{3}$ uno coronato venditur, ergo ulnæ 90 venduntur $\frac{90}{1l - \frac{1}{3}}$ coronatorum: hæc ſecundi pecunia eſt. Utriuſq; ſumma addita eſt $\frac{390l - 40}{3q - 1l}$ æqua $\frac{42}{1}$. Ergo $390l - 40$ & $126q - 42l$ æquabuntur. Addantur utrique parti 40, tunc æquabuntur $390l$ & $126q + 40 - 42l$. addantur utrique parti $42l$, tunc quoque æquabuntur $432l$ & $126q + 40$. Nunc dimidium é $\frac{24}{7}$ eſt $\frac{12}{7}$, cujus quadratus eſt $\frac{144}{49}$, unde ſi tollas $\frac{20}{63}$, manebunt $\frac{1156}{441}$, cujus reliqui latus eſt $\frac{34}{21}$: quod additum ad $\frac{12}{7}$ eſt $\frac{70}{21}$ ſeu $\frac{10}{3}$ pro valore unius lateris. Ergo primus ulnas $3\frac{1}{3}$ vendidit uno coronato, & ſecundus 3 ulnas eodem pretio vendidit. Jam ſi $3\frac{1}{3}$ venduntur uno coronato, ergo 40 venduntur 12: & ſimiliter ſi 3 venduntur uno coronato, ergo 90 venduntur coronatis 30. Atqui $12 + 30$ ſunt 42. Hîc detracto figurato minimo é quadrato dimidii, reliquum dimidiato medio additum eſt: ſi ab eo ſublatum fuiſſet, reliquum fuiſſet $\frac{2}{21}$, unde per theſim tollenda fuiſſet $\frac{1}{3}$, quod eſt impoſſibile. Propoſitam igitur quæſtionem ſola reliqui additio, non etiam ſubductio explicabit.

3. Trium continué proportionalium primus eſt $20\frac{1}{4}$, duplus medii cum reliquo eſt 22, quantus eſt medius. Eſto pro tertio $1l$. hîc quia tertius cum duplo medii eſt 22, ſi é 22 tollatur $1l$, reliquum $22 - 1l$ erit duplum medii. Itaq; terminus medius erit $11 - \frac{1l}{2}$, totaq; proportio erit $20\frac{1}{4}$, $11 - \frac{1l}{2}$ & $1l$. Quadratus igitur medii $121 - 11l + \frac{1q}{4}$ æquabitur plano extremorum $20\frac{1}{4}l$. Addantur utriſq; $11l$, tunc inter ſe æquabuntur $121 + \frac{1q}{4}$ & $31\frac{1}{4}l$ hoc eſt per 3 verſ. 3 cap. $484 + 1q$ & $125l$. Nunc dimidium é 125 eſt $\frac{125}{2}$, cujus quadratum eſt $\frac{15625}{4}$: unde ſi tollas 484, reſtabunt $\frac{13689}{4}$, cujus reliqui latus eſt $\frac{117}{2}$, quod ſubductum é $\frac{125}{2}$ relinquit 4 pro valore unius lateris. Itaque tertius proportionalis fuerit 4. Sed $22 - 4$ ſunt 18, quare ſecundus proportionalis erit 9. Hîc detracto figurato minimo é quadrato dimidiati medii reliquum é dimidiato medio ſubductum eſt. Si additũ ei fuiſſet,

ſumma

ſumma fuiſſet 121, quæ ſumma per theſim deducenda fuiſſet é 22, quod eſt impoſſibile. Sola igitur reliqui ſubductio, non etiam ejus ad dimidiatum medium additio propoſitam quæſtionem explicabit. Hîc quoq; figurati inexplicabilis quæſtio eſſe poteſt, ut

4. Quas in partes duas ſecandus eſt 12, ut totus ex earum quadratis ſit 100? Eſto 1l pro prima parte, ejus quadratus erit 1q, & ſecũda pars erit 12 − 1l, cujus quadratus eſt 144 + 1q − 24l. Hîc ſumma é quadratis 144 + 2q − 24l & 100 æquantur per theſim: utriſq; adde 24l, æquabuntur igitur 144 + 2q & 100 + 24l: utrinq; tolle 100, æquabuntur inter ſe 44 + 2q & 24l, hoc eſt per 3 verſ. 3 cap. 22 + 1q & 12l. Nunc dimidium é 12 eſt 6, cujus quadratus eſt 36: & 36 − 22 ſunt 14, cujus reliqui latus eſt l14: denique prima pars erit 6 − l14, cujus quadratum eſt 50 − l2016: ſecunda erit 6 + l14, cujus quadratum eſt 50 + l2016, & totus ex hujuſmodi quadratis eſt 100.

Quadratus binomius tum affirmatus, tum reſiduus ſæpe in ſuum latus reſolvendus eſt, quæ analyſis ſingulare aliquod hujus æquationis effectum eſt: eam igitur corollarii loco ſequenti capite breviter deſcribam.

De binomii & reſidui analyſi. Cap. VI.

1. SI dati binomij aut reſidui utrumq; nomen dimidiatum quadretur, tumq; latus differentiæ quadratorum ad dimidium majoris nominis addatur & indidem ſubducatur, latus totius plus vel minus latere reliqui erit dati binomij aut reſidui latus.

Eſto quadratus binomius 72 + l2880: hujus dimidiatũ nomen majus eſto 36, minus l720: & dimidiatorũ quadrata ſunto 1296 & 720. tumq; 1296 − 720 eſto 576: cujus differentiæ latus eſto 24, quod ad dimidium 36 additum eſto 60, cujus latus eſto l60: & indidem ſubductum eſto 12, cujus latus eſto l12.

Dico l60+l12 eſſe latus dati binomii 72+l2880. Etenim nomẽ majus 72 in duas inæquales partes ita dividatur, ut planus ex iis ſit 720. & hujus partitionis major pars eſto 1l. erit igitur minor 72−1l. harum partium planus eſt 72l−1q æqualis 720 ex theſi: utriq; parti addatur 1q, æquabuntur 72l & 1q+720. Hæc ſecunda ſecundi generis æquatio eſt: Proprietatis ejus applicatio in ipſa theſi anteceſſit. Nam dimidium ẽ 72 fuit 36, cujus quadratus numerus fuit 1296 & 1296−720 fuit 576, cujus latus 24 additum ad 36 fuit 60, cujus latus eſt l60 pro valore majoris lateris. majus igitur diagonale erit 60, minus igitur erit 12. nam ex theſi 36+24 ſunt 60, ergo 60−36 ſunt 24: item ex theſi 36−12 ſunt 24, & 36 eſt dimidium ẽ 72 etiam ex theſi: ergo per proprietatẽ proportionis Arithmeticæ 60+12 erunt 72. Itaq; per proprietatẽ ſecũdę æquationis ſecũdi generis, planus ẽ 60 & 12 erit 720: factꝰ igitur á l60 per l12 erit l720. Dimidiũ aũt l2880 eſt l720 ex theſi, ergo l720 duplicatũ erit l2880. Nunc quadrata ẽ l60 & l12 fuerunt 60 & 12, quorũ ſumma fuit 72: & l60 per l12 fecit l720, quod duplicatũ fuit l2880: hæc enim omnia demõſtrata ſunt. Cúm igitur l60+l12 in ſeſe multiplicatum faciat 72+l2880, conſequens eſt l60+l12 eſſe dati binomii 72+l2880 latus. Eadem demonſtratio valebit in reſiduo 72−l2880, quia nomina reſidui ſunt nomina binomii.

Binomii

Analyſis

72+l2880
36 l720
1296−720 eſt 576,
cujus quadrati latus
eſt 24.

36	36
add. 24	ſubd. 24
60 cujus quadrati latus eſt l60.	12 cujus quadrati latus. eſt l12.

Geneſis

l60+l12
l60+l12
l720+12
60+l720
72+l2880

Reſidui

Reſidui

Analyſis

72—l2880
36 l720
1296—720 eſt 576, cujus quadrati latus eſt 24.

36	36
add. 24	ſubd. 24
60 cujus quadrati latus eſt l60.	12 cujus quadrati latus eſt l12.

Geneſis

l60—l12
l60—l12
—l720+12
60—l720
72—l2880

In his exemplis differentia quadratorum é dimidiis rationalis fuit: ſi ea irrationalis erit, diagonalium latera aut uno nomine dicentur, aut non. Si uno nomine dicantur, ea biquadratorum latera futura ſunt: tunc enim quadratus eſt latus quadrati, ideoq; ejus latus erit latus biquadrati, ut hîc:

Binomii

Analyſis

l448+14
l112 7
112—49 eſt 63 cujus quadrati latus eſt l63.

l112	l112
add. l63	ſubd. l63
l343 cujus quadrati latus eſt lbq343.	l7 cujus quadrati latus eſt lbq7.

Geneſis

lbq343+lbq7
lbq343+lbq7
lbq2401+l7
l343+lbq2401
l448+14

Reſidui

Analyſis

l448—14

l112 7

112—49 eſt 63, cujus quadrati latus eſt l63.

l112	l112
add. l63	ſubd. l63
l343 cujus quadrati latus eſt lbq343.	l7 cujus quadrati latus eſt lbq7.

Geneſis

lbq343—lbq7

lbq343—lbq7

—lbq2401—l7

l343—lbq2401

l448—14

Si diagonalium latera vno nomine dici nequeant, tum latus binomii, itemque reſidui pro uno nomine accipietur: ideoq; in eorum geneſi nomina tantúm æqualia inter ſe multiplicabuntur, & é ſignis minoribus fiet ſignum minus.

Binomii

Analyſis

24 —+— l448

12 l112

144—112 eſt 32, cujus quadrati latus eſt l32.

12	12
add. l32	ſubd. l32
12+l32 cujus quadrati latus eſt lb.12+l32.	12—l32 cujus quadrati latus eſt lr.12—l32.

Geneſis

lb.12 —+— l32	lr.12—l32
lb.12 —+— l32	lr.12—l32
12 —+— 32	12—32

24

lb.12+l32

lr.12—l32

144—32, hoc eſt 112, cujus quadrati latus eſt l112, quod duplicatum eſt l448. Itaque totius multiplicationis ſumma eſt 24+l448.

Reſi-

Reſidui

Analyſis

24 − l448
12   l112
144 − 112 eſt 32
cujus quadrati latus
eſt l32.

12
add. l32
12 + l32
cujus quadrati latus eſt lb. 12 + l32.

12
ſubd. l32
12 + l32 cujus quadrati latus eſt lr. 12 − l32.

Geneſis

lb. 12 + l32   lr. 12 − l32
lb. 12 + l32   lr. 12 − l32
12 + 32   12 − 32
24
lb. 12 + l32
lr. 12 − l32
144 − 32 hoc eſt 112, cujus quadrati latus eſt l112, quod duplicatum eſt l448. Itaq; totius multiplicationis ſumma eſt 24 + l448.

Item Binomii

Analyſis

160 + l12
l15   l3
15 − 3 eſt 12 cujus
quadrati latus eſt l12.

l15
add. l12
l15 + l12
cujus quadrati latus eſt lb. l15 + l12.

l15
ſubd. l12
l15 − l12 cujus quadrati latus eſt lr. l15 − l12.

Geneſis

lb. l15 + l12   lr. l15 − l12
lb. l15 + l12   lr. l15 − l12
l15 + 12   l15 − 12
160
lb. l15 + l12
lr. l15 − l12
15 − 12 hoc eſt 3 cujus quadrati latus eſt l3, quod duplicatum eſt l12. Itaq; totius multiplicationis ſumma eſt l60 + l12.

Reſidui

Analyſis

l60 − l12

l15 l3

15 − 3 eſt 12 cujus quadrati latus eſt l12.

l15	l15
add. l12	ſubd. l12
l15 + l12	l15 − l12 cujus
cujus quadrati latus eſt lb. l15 + l12.	quadrati latus eſt lr. l15 − l12.

Geneſis

lb. l15 + l12	lr. l15 − l12
lb. l15 + l12	lr. l15 − l12
l15 + 12	l15 − 12

l60

lb. l15 + l12

lr. l15 − l12

15 − 12 hoc eſt 3, cujus quadrati latus eſt l3, quod duplicatum eſt l12. Itaq; totius multiplicationis ſumma eſt l60 − l12.

FINIS SECVNDI LIBRI
ALGEBRÆ.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

INDEX CAPITVM LIBRI
PRIMI ARITHMETICÆ.

Caput — *Pagina*

1 *De definitione & diviſione Arithmetica deq; numerorum notatione* 1.
2 *De ſecunda notationis parte* 5.
3 *De numeratione in genere & de numeratione æquata* 9.
4 *De numeratione proportionata & præſertim de multiplicatione* 11.
5 *De diviſione* 14.
6 *De numerorum proprietatibus é multiplicatione & diviſione ſumptis.* 18.
7 *De ſ[illegible] diviſione, & de verorum integrorũ additione & ſubductione* 22.
8 *De multiplicatione verorum integrorum* 25.
9 *De diviſione verorum integrorum* 29.
10 *De proprietatibus verorũ integrorũ quæ colligi ex ipſorũ numeratione poſſunt, & præſertim de numero pari & impari* 31.
11 *De primis & compoſitis tum per ſe tum inter ſe* 34.
12 *De proprietatibus numerorum inter ſe* 36.
13 *De inventione omnium menſurarum dati numeri compoſiti* 39.
14 *De proprietatibus primorum inter ſe* 43.
15 *De inventione generali communis tum maximæ menſuræ, tum minimi dividui* 45.
16 *De numeratione verarum partium in genere, & de reductionibus ei accidentibus* 48.
17 *De æquata verarum partium numeratione* 50.
18 *De numeratione verarum partium proportionata* 52.
19 *De numeratione miſta in genere, & de miſta æquata* 53.
20 *De numeratione miſta proportionata* 55.

SECVNDI.

1 *De comparatione in quantitate* 58.
2 *De comparatione in qualitate & præcipué de proportione* 63.
3 *De proportione arithmetica* 66.
4 *De progreſſione arithmetica* 67.
5 *De proportione geometrica & quidem de disjuncta* 71.
6 *De proportione disjuncta vulgari deque ejus ſimplicis exemplis* 73.
7 *De multiplicis proportionis exemplis* 74.
8 *De proportione disjuncta artificiali, & præſertim de proportionum & proportionalium additione & ſubductione* 77.
9 *De regula ſocietatis & quidem*

de prima ejus ſpecie 81.
10 De ſecunda regula ſocietatis 83.
11 De proportionum multiplicatione 84.
12 De proportione continuata 88.
13 De proportione continua in tribus terminis tantúm 91.
14 De ratione duorum primorum ad rationem extremorum & de inventione continué proportionalium. 92.
15 De ſumma terminorum continué proportionalium inventione 95.
16 De diſproportione 97.

ELENCHVS LIBRI PRIMI

ALGEBRÆ.

Caput Pagina
1 De definitione & diviſione Algebræ deque Algebraica notatione pag. 101.
2 De ſignorum numeratione 104.
3 De notarum numeratione in genere, deinde de prima æquata & quidem integrorum 105.
4 De prima numeratione proportionata & quidem integrorum 106.
5 De prima æquata partium numeratione 109.
6 De prima proportionata partiũ numeratione 112.
7 De ſecunda numeratione, deque quadrati, cubi, & ſolidi analyſi 113.
8 De ſecunda numeratione æquata & quidem integrorum 120.
9 De ſecunda numeratione proportionata & quidem integrorum 124.
10 De ſecunda æquata partium numeratione 128.
11 De ſecunda proportionata partium numeratione 131.

SECVNDI.

1 De æquatione Algebraica, deq; ejus partibus & præmiſſa ratiocinatione 132.
2 De prima æquatione Algebraica 134.
3 De ſecunda æquatione 138.
4 De ſecunda æquatione primi generis 139.
5 De ſecunda æquatione ſecundi generis 144.
6 De binomii & reſidui analyſi 147.

FINIS.